Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2000

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 292 (WT=3,46) i 293 (WT=2,20) z numeru 2/2000

Jarosław Łazuka	– Warszawa	34,93
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	32,24
Aleksander Surma	– Myszków	31,76
Marek Wójcicki	– Szczecin	28,23
Grzegorz Miłoś	– Mielec	24,40
Tomasz Rudny	– Warszawa	22,18

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 393 (WT=3,13) i 394 (WT=1,29) z numeru 1/2000

Jarosław Łazuka	– Warszawa	45,48
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,60
Rafał Pikuła	– Wrocław	42,57
Jerzy Witkowski	– Radlin	40,12
Michał Adamaszek	– Kęty	40,06
Marcin Peczarski	– Warszawa	37,87
Andrzej Jóźwik	– Kielce	37,72

Pan Łazuka kończy drugą czterdziestoczteropunktową rundę.

Zadania z fizyki nr 302, 303

Redaguje Jerzy B. BROJAN

302. Przewodząca kula o promieniu r składa się z dwóch zetkniętych półkul. Jaka jest wartość siły odpychającej te półkule, jeśli ładunek całej kuli wynosi Q?

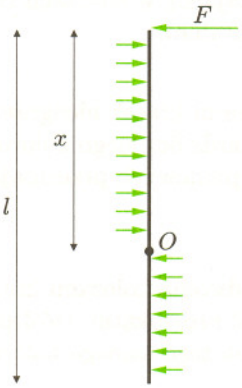
303. Dwa jednakowe naczynia o ściankach nie przewodzących ciepła są połączone rurką z zaworem (kranikiem). Początkowo w jednym naczyniu znajdował się gaz pod ciśnieniem p i w temperaturze T, a w drugim naczyniu była próżnia. Otwarto zawór, tak że ciśnienia się wyrównały. Jaka będzie wtedy wartość ciśnienia p' oraz temperatur T_1 i T_2 w naczyniach? Gaz jest doskonały, a stosunek jego ciepeł właściwych wynosi $\gamma = c_p/c_v$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2000

Przypominamy treść zadań:

298. Na poziomym stole leży jednorodny pręt o ciężarze P, przy czym siła jego nacisku na stół jest równo rozłożona (dla każdego jednostkowego odcinka pręta jest jednakowa). Jeśli współczynnik tarcia pręta o stół wynosi f, to jaką siłą trzeba działać na koniec pręta w kierunku poziomym i prostopadłym do pręta, aby ruszyć go z miejsca?

299. Walcowa płytka szklana może mieć właściwości soczewki, jeśli współczynnik załamania szkła jest różny w różnych punktach płytki. Przyjmijmy, że współczynnik ten zależy od odległości od osi optycznej r według wzoru $n(r) = n_0 + \alpha r^{\beta}$ (a nie zmienia się przy przesunięciach wzdłuż osi). Jakie warunki muszą spełniać parametry w podanym wzorze, aby płytka o grubości d była soczewką o ogniskowej f? Zakładamy, że ogniskowa jest znacznie dłuższa zarówno od grubości, jak i od średnicy płytki.

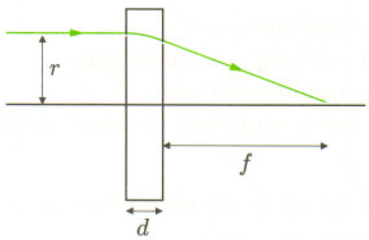


Rys. 1

298. Ewentualny ruch pręta będzie jego obrotem wokół osi O leżącej w nieznanej odległości x od punktu przyłożenia siły (pomijamy dowód, że oś ta przechodzi przez prostą, na której leży pręt). Siły tarcia statycznego są zatem skierowane zgodnie z rysunkiem 1 (gdzie F – szukana siła zewnętrzna, l – długość pręta). W stanie równowagi ich całkowity moment względem górnego końca pręta jest równy zeru, tzn.

$$\int_0^x s\,ds = \int_x^l s\,ds.$$

Stąd $x = l/\sqrt{2}$, zatem łączna siła tarcia skierowana w prawo jest równa $F_{\rightarrow} = Pf/\sqrt{2}$, w lewo – $F_{\leftarrow} = Pf(1 - 1/\sqrt{2})$, a szukana siła F wynosi $F = F_{\rightarrow} - F_{\leftarrow} = Pf(\sqrt{2} - 1)$.



Rys. 2

299. Warunek skupiania się wiązki promieni w ognisku jest równoważny temu, że czas przejścia każdego promienia od odległego źródła przez soczewkę do ogniska jest jednakowy (szczególnie łatwo się o tym przekonać rozpatrując kolejne powierzchnie falowe). Ponieważ w ośrodku o współczynniku załamania n czas przejścia jest proporcjonalny do iloczynu drogi przez n, więc – pomijając pionowe przesunięcie promienia w płytce – otrzymujemy wzór (zob. rys. 2)

$$n(r)d + \sqrt{f^2 + r^2} = \text{const.}$$

Biorąc pod uwagę założenie o długiej ogniskowej f, przybliżamy pierwiastek wyrażeniem $f + r^2/2f$. Po podstawieniu wzoru na $n(r)$ nietrudno stwierdzić, że parametr n_0 nie ma znaczenia, parametr β ma wartość 2, a parametr α równa się $-1/(2fd)$.

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 2000

Zadania z matematyki nr 405, 406

Redaguje Marcin E. KUCZMA

405. Przez środek I okręgu wpisanego w nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC poprowadzono okręgi k_A, k_B, k_C: okrąg k_A jest mniejszym z dwóch okręgów przechodzących przez I, stycznych do prostych AB i AC; okręgi k_B i k_C są określone analogicznie. Okręgi k_B i k_C przecinają się w punktach I, P; okręgi k_C i k_A przecinają się w punktach I, Q; okręgi k_A i k_B przecinają się w punktach I, R. Dowieść, że środki okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są współliniowe.

406. Czy istnieje rosnący ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3, \ldots$, w którym każdy wyraz (począwszy od drugiego) jest nie mniejszy od średniej arytmetycznej dwóch wyrazów z nim sąsiadujących?

Zadanie **406** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2000

Przypominamy treść zadań:

401. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych $a > 1$, $n > 1$ o tej własności, że każdy dzielnik pierwszy liczby $a^n - 1$ jest dzielnikiem liczby $a - 1$.

402. Dwusieczna kąta DAB równoległoboku $ABCD$ przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie CKL leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD.

401. Niech (a, n) będzie parą liczb całkowitych o wymaganych własnościach i niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby n. Przyjmijmy, że $p^k \| n$ (napis ten oznacza, że n dzieli się dokładnie przez p w potędze k; to znaczy, dzieli się przez p^k, ale nie przez p^{k+1}). Mamy równość

$$(1) \qquad a^{p^k} - 1 = (a-1) \cdot A, \qquad \text{gdzie} \quad A = a^{p^k - 1} + \ldots + a + 1.$$

Weźmy dowolny dzielnik pierwszy p' liczby A. Jest to także dzielnik liczby $a^{p^k} - 1$, więc i liczby $a^n - 1$, więc i liczby $a - 1$ (warunek zadania). Zatem $a \equiv 1 \pmod{p'}$, skąd

$$0 \equiv A \equiv 1 + \ldots + 1 + 1 \equiv p^k \pmod{p'},$$

czyli $p' = p$. To dowodzi, że A jest potęgą liczby p oraz że liczba $a - 1$ dzieli się przez p. Określamy wykładnik $m \geq 1$ przez warunek: $p^m \| a - 1$.

Przypuśćmy, że p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Wykażemy, że wówczas

$$(2) \qquad p^{m+r} \| a^{p^r} - 1 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dla $r = 0$ jest to prawda. Ustalmy $r \geq 0$ i załóżmy indukcyjnie, że

$$a^{p^r} - 1 = up^{m+r} \qquad (u \text{ – liczba niepodzielna przez } p).$$

W takim razie

$$a^{p^{r+1}} - 1 = \left(up^{m+r} + 1\right)^p - 1 = \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} \left(up^{m+r}\right)^j =$$

$$= p \cdot up^{m+r} + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot u^2 p^{2m+2r} + \sum_{j=3}^{p} \binom{p}{j} \left(up^{m+r}\right)^j =$$

$$= up^{m+r+1} + \left(\text{składniki podzielne przez } p^{2m+2r+1}\right).$$

Ta liczba dzieli się dokładnie przez p^{m+r+1}; mamy tezę indukcyjną.

W udowodnionej własności (2) przyjmijmy $r = k$; zgodnie ze wzorem (1) otrzymujemy zależność $p^{m+k} \| (a-1) \cdot A$. Skoro zaś $p^m \| a - 1$, dostajemy wniosek, że $p^k \| A$. Wcześniej stwierdziliśmy, że A jest potęgą liczby p. To by znaczyło, że $A = p^k$. Taka równość nie jest jednak możliwa, bowiem $a^{p^k} - 1 > p^k(a-1)$ (nierówność Bernoulliego).

Sprzeczność jest rezultatem przypuszczenia, że p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Zatem $p = 2$. A ponieważ p jest dowolnie wybranym dzielnikiem pierwszym liczby n, wynika stąd, że $n = 2^k$. Liczba A jest więc potęgą dwójki (choć niekoniecznie o wykładniku k).

Wykażemy, że $k = 1$. Przypuśćmy, że $k \geq 2$, a więc $4|n$. Każdy dzielnik pierwszy liczby $a^2 + 1$ jest także dzielnikiem liczby $a^4 - 1$, więc i liczby $a^n - 1$, więc i liczby $a - 1$ (warunek zadania), więc i liczby $a^2 - 1$. Wniosek: liczba $a^2 + 1$ nie ma dzielników pierwszych większych od 2; jest więc potęgą dwójki. Mamy sprzeczność, bo $a > 1$ jest liczbą nieparzystą i wobec tego $a^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$.

To dowodzi, że istotnie $k = 1$; stąd $n = 2$. Liczba A we wzorze (1) jest równa $a + 1$. Jak wykazaliśmy chwilę wcześniej, jest to potęga dwójki.

Dostajemy odpowiedź: tylko para postaci $n = 2$, $a = 2^s - 1$ (s – liczba całkowita; $s > 1$) może mieć własność, o którą chodzi w zadaniu. Na odwrót, łatwo się przekonać, że każda taka para ma ową własność.

402. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie CKL, przez M – środek boku CK tego trójkąta, a przez E – punkt prostej AD wyznaczający prostą $CE \| AK$. Trójkąt KOC jest równoramienny ($|OK| = |OC|$). Zatem

$$|\angle OKC| = 90^\circ - |\angle MOK| = 90^\circ - |\angle MOC| =$$
$$= 90^\circ - |\angle CLK| = |\angle OCL|.$$

Jeśli $|AB| \geq |AD|$, to $|\angle OKB| = |\angle OKC|$, $|\angle OCD| = |\angle OCL|$. Jeśli zaś $|AB| \leq |AD|$ (jak na rysunku), to $|\angle OKB| = 180^\circ - |\angle OKC|$, $|\angle OCD| = 180^\circ - |\angle OCL|$. W każdym przypadku z uzyskanej równości $|\angle OKC| = |\angle OCL|$ wynika równość $|\angle OKB| = |\angle OCD|$.

Trójkąt ABK przystaje do trójkąta EDC; tak więc $|KB| = |CD|$. Ponadto $|OK| = |OC|$. Wobec tego trójkąt OKB przystaje do trójkąta OCD, i w efekcie $|\angle BOK| = |\angle DOC|$. Z tej równości z kolei wynika równość $|\angle BOD| = |\angle KOC|$. Skoro wreszcie

$$|\angle KOC| = 2 \cdot |\angle MOC| = 2 \cdot |\angle CLK| = |\angle BCD|,$$

zatem, ostatecznie, $|\angle BOD| = |\angle BCD|$. Stąd wynika, że punkt O leży na okręgu wyznaczonym przez punkty B, C, D.