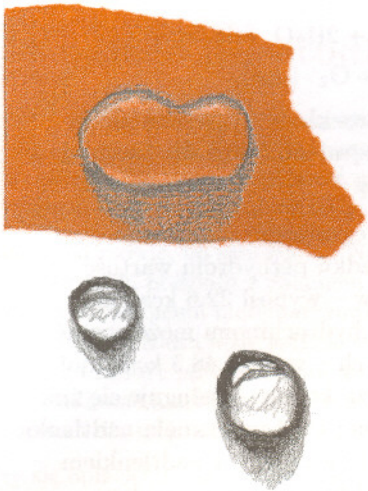


to przez kolejne iteracje dostajemy nieskończenie wiele punktów wymiernych na krzywej $y^2 - x^3 + a = 0$. Pozostaje pytanie, czy otrzymamy w ten sposób wszystkie punkty wymierne na tej krzywej.

Opisane wyżej metody znajdowania punktów wymiernych miały wspólną cechę: znajomość pewnego punktu wymiernego pozwalała nam wygenerować inne punkty wymierne na tej krzywej. Okazuje się, że metoda wymiernych nachyleń pozwala znaleźć wszystkie punkty wymierne na krzywych (stożkowych) opisanych wielomianami stopnia drugiego o współczynnikach wymiernych.

W przypadku krzywych eliptycznych (tj. krzywych opisanych przez pewne wielomiany trzeciego stopnia), do których należy nasza krzywa Bacheta (dla $a \neq 0$), sytuacja jest następująca. W 1923 roku Mordell udowodnił, że o ile krzywa eliptyczna ma jakiś punkt wymierny, to istnieje skończona liczba punktów wymiernych, z których można otrzymać drogą prostych operacji geometrycznych (kreślenia siecznych i stycznych) wszystkie punkty wymierne na tej krzywej. Przykład krzywej wykładniczej $e^x - y = 0$ pokazuje, że takie metody nie zawsze działają.

Ta przyroda jest niegłupia...

Krzysztof REJMER

Tak śpiewali kiedyś Starsi Panowie w piosence o wiośnie nad Prosną, co zapewne starsi Czytelnicy *Delty* doskonale pamiętają. Jednak w przypadku, o którym mówi ten artykuł, określenie *niegłupia* nie jest najlepsze, wypadałoby raczej powiedzieć – *wyrafinowana*.

To będzie opowieść o żuczkach. A właściwie o żukach lub raczej o jednym gatunku żyjącym w Ameryce Południowej, który jest prawdziwą bestią, choć jego krewni w Europie – mimo że znacznie mniejsi – nie są znowu aż tak wiele gorsi. Oto jak pisze o nich klasyk zoologii – Alfred Brehm:

Rodzaj Brachynus, żyjący gromadnie pod nasłonecznionymi kamieniami, znany jest z tego, że ciecz z gruczołów odwłokowych wyrzucana przez te chrząszcze dla obrony, eksploduje z trzaskiem w powietrzu, tworząc obłoczek gazowy, a sama wydzielina parzy dotkliwie dłonie, zwłaszcza jeśli w grę wchodzą wielkie gatunki tropikalne.

Oznacza to ni mniej ni więcej, że broń biologiczna nie jest wynalazkiem człowieka, choć na usprawiedliwienie żuka bombardiera (angielska nazwa *bombardier beetle*) rzec trzeba, iż używa jej wyłącznie w celach obronnych. Zresztą nie tylko on – w przyrodzie takich gatunków, na których niejedna żaba i niejeden ptak się sparzyły (czasami dosłownie!), jest znacznie więcej. W przypadku bombardiera potencjalny napastnik musi liczyć się z możliwością zostania opryskanym gorącym, wodnym roztworem chinonu, a więc z niebezpieczeństwem poparzenia i podrażnienia chemicznego, gdyż roztwór chinonu jest żrący. Bombardier potrafi strzelać precyzyjnie we wszystkich kierunkach, powtarzając swój manewr seryjnie, do trzydziestu uderzeń w jednej serii, przy czym czas jednego wyładowania nie przekracza 30 ms.

Oczywiście wiele zwierząt, poczynając od mrówek, przez gąsienice różnych gatunków motyli, pająki, a kończąc na skorpionach i jadowitych wężach, posługuje się bronią chemiczną, ale specjalnością bombardiera, który obronę chemiczną opanował do perfekcji, jest umiejętność zgotowania nieprzyjacielowi prawdziwie gorącego przyjęcia! W jego ciele znajduje się zbiornik z wodnym roztworem zawierającym 25% nadtlenku wodoru H_2O_2 i 10% hydrochinonu. Chinon jest związkiem o pierścieniowej budowie i wzorze $C_6H_4O_2$, natomiast wzór chemiczny hydrochinonu to $C_6H_4(OH)_2$. Związki te znalazły przemysłowe zastosowanie w fotografii oraz w garbarstwie. W trakcie wyładowania część roztworu zostaje zmieszana z enzymami, dzięki którym zachodzą następujące

Rozwiązanie zadania F 530.
Niech h będzie wysokością, na której znajduje się poszukiwany otwór. Przy wypływie z pierwszego otworu cząsteczki wody uzyskują prędkość poziomą równą

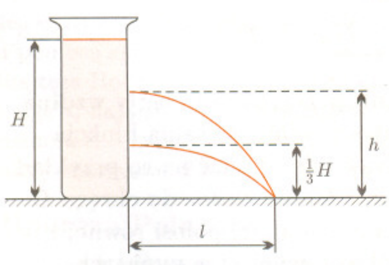
$$v = \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{3}H\right)} = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}.$$

Czas ruchu cząsteczki wody w strumieniu wynosi $t = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$, a zasięg poziomy strumienia

$$s = vt = \frac{2}{3}H\sqrt{2}.$$

Podobnie zasięg drugiego strumienia wynosi

$$s = 2\sqrt{(H-h)h}.$$



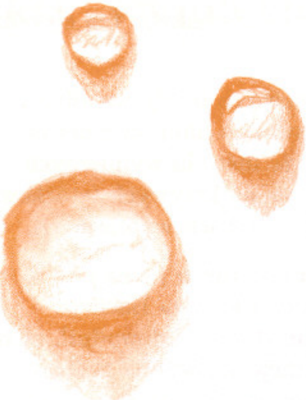
Ponieważ zgodnie z warunkiem zadania zasięgi obu strumieni mają być równe, otrzymujemy

$$\frac{2}{3}H\sqrt{2} = 2\sqrt{(H-h)h},$$

co po odpowiednich przekształceniach daje nam równanie na h

$$h^2 - Hh + \frac{2}{9}H^2 = 0.$$

Rozwiązania tego równania to $h_1 = \frac{1}{3}H$ i $h_2 = \frac{2}{3}H$. Pierwsze rozwiązanie odpowiada danemu strumieniowi, drugie jest szukanym wynikiem.



reakcje:

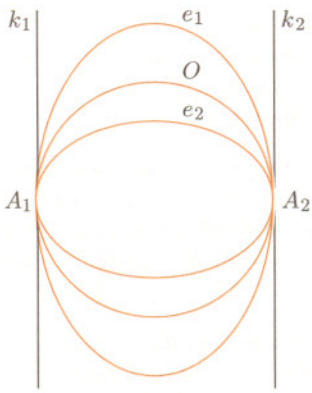
$$\text{hydrochinon} + H_2O_2 \rightarrow \text{chinon} + 2H_2O \quad (\text{ciecz}),$$
$$2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2 \quad (\text{gaz}).$$

Ściśle mówiąc, enzym jest konieczny jedynie do rozkładu hydrochinonu, bowiem nadtlenek wodoru rozkłada się nader chętnie, o czym wie każdy, kto kiedykolwiek polewał skaleczenie wodą utlenioną.

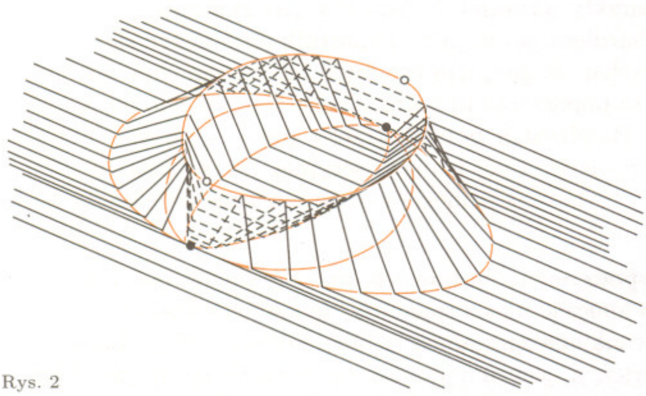
Reakcje rozkładu hydrochinonu i perhydrolu są egzotermiczne, to znaczy przebiegają z wydzielaniem się ciepła. W przypadku perhydrolu wartość ciepła reakcji jest dobrze znana z eksperymentów – wynosi 22,6 kcal/mol (w temperaturze 25°C). W przypadku rozkładu hydrochinonu może zostać znaleziona za pomocą obliczeń elektrochemicznych – wynosi 48,5 kcal/mol (w temperaturze 25°C). Jeden miligram roztworu, którym posługuje się żuk bombardier, zawiera 0,91 mikromola hydrochinonu i 7,4 mikromola nadtlenku wodoru. Jeśli hydrochinon rozkłada się całkowicie w reakcji z nadtlenkiem wodoru, to tego ostatniego pozostaje jeszcze 6,49 mikromola w każdym miligramie, następnie ta pozostałość rozkłada się na tlen i wodę. W pierwszej z reakcji wydziela się ciepło 0,044 cal, a w drugiej 0,146 cal na jeden miligram roztworu – razem 0,19 cal na miligram. Ciepło to zostaje zużyte na ogrzanie roztworu do temperatury wrzenia, a następnie na odparowanie jego części.

Załóżmy dla uproszczenia, że temperatura wrzenia roztworu i jego ciepło właściwe oraz ciepło parowania są takie same jak w przypadku wody (ciepło właściwe wody ma wartość około jednej kalorii na gram). Przyjmując, że temperatura początkowa wynosi 25°C, łatwo obliczyć, iż do „zagotowania" jednego miligrama roztworu potrzeba 0,075 cal. Pozostałe 0,115 cal wystarcza na odparowanie około 19% roztworu (ciepło parowania wody wynosi około 600 cal/g). Z rachunków powyższych wynika, że głównym „dostawcą ciepła" jest reakcja rozkładu perhydrolu (około 77%). Pierwsza z reakcji ma inne zadanie: dostarcza substancji o działaniu drażniącym. Powstający w trakcie rozkładu perhydrolu tlen wywołuje znaczny wzrost ciśnienia, dzięki czemu drażniąco-parzący ładunek może zostać wyrzucony z dużym impetem.

Na zakończenie pozostaje dodać, że, oczywiście, znalazło się kilku fizyków, którzy wykonali serię typowo ludzkich, kalorymetrycznych eksperymentów na żuku bombardierze, mierząc temperaturę sprayu wyrzucanego przez owada, oraz różne inne wielkości, przytwierdziwszy uprzednio biedakowi do ciała termozłącze, a następnie nasyłając na niego jeszcze biedniejsze w tej sytuacji mrówki.



Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3

Nawet jeśli wykres funkcji $f(x,y)$ jest ciągły wzdłuż dowolnej prostej na płaszczyźnie, to sama funkcja ciągła być nie musi. Nietrudno podać na to przykład. Na rysunku 1 proste k_1 i k_2 są styczne do okręgu O (o promieniu r), elipsy e_1 (o małej półosi równej r) i elipsy e_2 (o dużej półosi równej r) w punktach odpowiednio A_1 i A_2. Funkcja f niech będzie równa zeru na obu elipsach, na zewnątrz dużej i w środku małej. Na okręgu O niech ma wartość 1 (oczywiście poza punktami A_1 i A_2, w których określona jest już wartość zero). Wykres funkcji uzupełniamy tak, by obrazował go rysunek 2, tzn., by wzdłuż dowolnej prostej, równoległej do k_1 oraz k_2 i zawartej pomiędzy k_1 i k_2, funkcja miała wykres jak na rysunku 3. Funkcja f nie jest, oczywiście, ciągła (w punktach A_1 i A_2), a jednak jest ciągła wzdłuż dowolnej prostej (dlaczego?).

W.S.