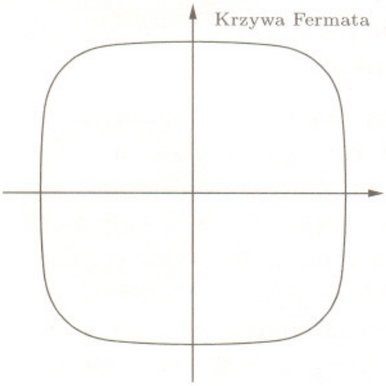
Punkty wymierne na krzywych płaskich

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

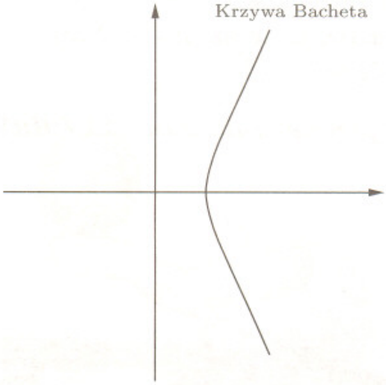
Rozważać będziemy krzywe na płaszczyźnie określone równaniami postaci $P(x,y)=0$. Należą do nich, na przykład, prosta $x+y-1=0$, okrąg $x^2+y^2-r=0$ $r>0$, krzywa Fermata $x^4+y^4-1=0$, krzywa Bacheta $y^2-x^3+a=0$, a – całkowite, czy też krzywa wykładnicza $y-\mathrm{e}^x=0$. Interesować nas będą punkty wymierne na tych krzywych, tj. punkty, których obie współrzędne są wymierne. Podstawowe pytania dotyczą istnienia punktów wymiernych na danej krzywej i metod znajdowania takich punktów.

Krzywa Fermata



Każdy punkt na prostej $x+y-1=0$ jest albo wymierny, albo ma obie współrzędne niewymierne. Zauważmy w tym miejscu, że nie jest możliwe, żeby cała krzywa składała się z punktów wymiernych, gdyż punktów takich jest po prostu za mało: jedynie przeliczalnie wiele, podczas gdy punktów na krzywej jest tyle, co liczb rzeczywistych, a więc nieprzeliczalnie wiele. Z drugiej strony zbiór punktów wymiernych nie jest znów taki mały: w dowolnym kole znajdziemy przynajmniej jeden punkt wymierny, co oznacza, że zbiór tych punktów jest gęsty na płaszczyźnie. Czy może się więc zdarzyć, że krzywa taki zbiór „ominie” i nie będzie na niej żadnego punktu wymiernego? Wydaje się to mało prawdopodobne, a jednak, nie szukając daleko, na okręgu $x^2+y^2-3=0$ nie ma ani jednego punktu wymiernego. Jest tak dlatego, że dla liczb całkowitych względnie pierwszych a i b, wyrażenie a^2+b^2 nie dzieli się przez 3. Fakt, że na krzywych $x^n+y^n-1=0$, $n>2$, nie ma punktów wymiernych o obu współrzędnych dodatnich, wynika z udowodnionego dopiero w 1994 r. przez A. Wilesa Wielkiego Twierdzenia Fermata. Istotnie: jeśli punkt $(\frac{p}{q},\frac{r}{s})$ należy do takiej krzywej, to $(ps)^n+(rq)^n=(qs)^n$ dla liczb całkowitych ps, rq, qs różnych od zera i dodatnich. W szczególnym przypadku, dla $n=4$, dowód twierdzenia Fermata został podany już w 1747 roku przez L. Eulera, od dawna wiedziano więc, że na krzywej $x^4+y^4-1=0$ jedynymi punktami wymiernymi są punkty: $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ oraz $(0,1)$. Można także wykazać, że na krzywej wykładniczej $y-\mathrm{e}^x=0$ jest tylko jeden punkt wymierny: (0,1). Wynika to z faktu, że dowolna potęga liczby e o wykładniku wymiernym i różnym od zera jest niewymierna.

Krzywa Bacheta

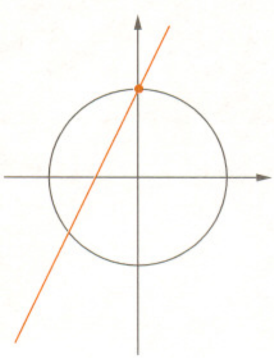


Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja na okręgu: $x^2+y^2-1=0$, na którym znajduje się nieskończenie wiele punktów wymiernych. Jak je znaleźć? Okazuje się, że jest na to prosta i efektywna metoda. Zaczynamy od zauważenia, że np. punkt (0,1) jest wymierny i należy do rozważanego okręgu. Teraz przez punkt (0,1) prowadzimy prostą o równaniu $y=mx+1$, gdzie $m\neq 0$. Prosta ta przetnie nasz okrąg w jeszcze jednym punkcie, którego współrzędne znajdziemy, podstawiając $y=mx+1$ do równania okręgu. Mamy $x^2+(mx+1)^2=1$, skąd

$$x((1+m^2)x+2m)=0$$

i dostajemy

$$x=-\frac{2m}{1+m^2},\qquad y=mx+1=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

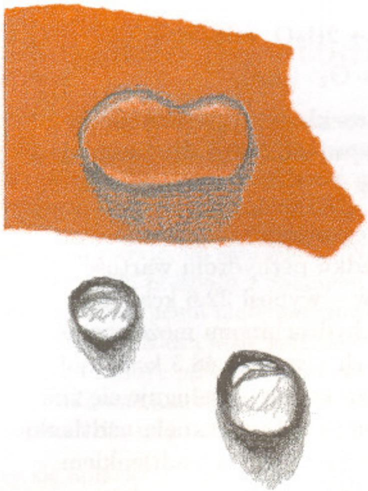


Nietrudno zatem wykazać, że (x,y) jest punktem wymiernym na okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą wymierną. Pozostawiamy to inwencji Czytelnika. Punkt $(0,-1)$ otrzymujemy kładąc $m=\infty$. Ponieważ punkty wymierne znajdujemy w opisanej teraz metodzie za pomocą prostych o nachyleniu wymiernym, więc metoda ta znana jest pod nazwą *metody wymiernych nachyleń*.

Rozważmy teraz krzywą Bacheta $y^2-x^3+a=0$, $a\in\mathbb{Z}$. Jeśli pewien punkt (x,y), $y\neq 0$, należący do tej krzywej, jest wymierny, to także punkt

$$B=\left(\frac{x^4+8ax}{4y^2},\frac{-x^6+20ax^3+8ax^2}{8y^3}\right)$$

– miejsce przecięcia naszej krzywej ze styczną do niej w punkcie A – jest punktem wymiernym (Bachet odkrył to w 1621 r.). Jeśli $x,y\neq 0$ i $a\neq 1,-432$,



to przez kolejne iteracje dostajemy nieskończenie wiele punktów wymiernych na krzywej $y^2 - x^3 + a = 0$. Pozostaje pytanie, czy otrzymamy w ten sposób wszystkie punkty wymierne na tej krzywej.

Opisane wyżej metody znajdowania punktów wymiernych miały wspólną cechę: znajomość pewnego punktu wymiernego pozwalała nam wygenerować inne punkty wymierne na tej krzywej. Okazuje się, że metoda wymiernych nachyleń pozwala znaleźć wszystkie punkty wymierne na krzywych (stożkowych) opisanych wielomianami stopnia drugiego o współczynnikach wymiernych.

W przypadku krzywych eliptycznych (tj. krzywych opisanych przez pewne wielomiany trzeciego stopnia), do których należy nasza krzywa Bacheta (dla $a \neq 0$), sytuacja jest następująca. W 1923 roku Mordell udowodnił, że o ile krzywa eliptyczna ma jakiś punkt wymierny, to istnieje skończona liczba punktów wymiernych, z których można otrzymać drogą prostych operacji geometrycznych (kreślenia siecznych i stycznych) wszystkie punkty wymierne na tej krzywej. Przykład krzywej wykładniczej $e^x - y = 0$ pokazuje, że takie metody nie zawsze działają.

Ta przyroda jest niegłupia...

Krzysztof REJMER

Tak śpiewali kiedyś Starsi Panowie w piosence o wiośnie nad Prosną, co zapewne starsi Czytelnicy *Delty* doskonale pamiętają. Jednak w przypadku, o którym mówi ten artykuł, określenie *niegłupia* nie jest najlepsze, wypadałoby raczej powiedzieć – *wyrafinowana*.

To będzie opowieść o żuczkach. A właściwie o żukach lub raczej o jednym gatunku żyjącym w Ameryce Południowej, który jest prawdziwą bestią, choć jego krewni w Europie – mimo że znacznie mniejsi – nie są znowu aż tak wiele gorsi. Oto jak pisze o nich klasyk zoologii – Alfred Brehm:

Rodzaj Brachynus, żyjący gromadnie pod nasłonecznionymi kamieniami, znany jest z tego, że ciecz z gruczołów odwłokowych wyrzucana przez te chrząszcze dla obrony, eksploduje z trzaskiem w powietrzu, tworząc obłoczek gazowy, a sama wydzielina parzy dotkliwie dłonie, zwłaszcza jeśli w grę wchodzą wielkie gatunki tropikalne.

Oznacza to ni mniej ni więcej, że broń biologiczna nie jest wynalazkiem człowieka, choć na usprawiedliwienie żuka bombardiera (angielska nazwa *bombardier beetle*) rzec trzeba, iż używa jej wyłącznie w celach obronnych. Zresztą nie tylko on – w przyrodzie takich gatunków, na których niejedna żaba i niejeden ptak się sparzyły (czasami dosłownie!), jest znacznie więcej. W przypadku bombardiera potencjalny napastnik musi liczyć się z możliwością zostania opryskanym gorącym, wodnym roztworem chinonu, a więc z niebezpieczeństwem poparzenia i podrażnienia chemicznego, gdyż roztwór chinonu jest żrący. Bombardier potrafi strzelać precyzyjnie we wszystkich kierunkach, powtarzając swój manewr seryjnie, do trzydziestu uderzeń w jednej serii, przy czym czas jednego wyładowania nie przekracza 30 ms.

Oczywiście wiele zwierząt, poczynając od mrówek, przez gąsienice różnych gatunków motyli, pająki, a kończąc na skorpionach i jadowitych wężach, posługuje się bronią chemiczną, ale specjalnością bombardiera, który obronę chemiczną opanował do perfekcji, jest umiejętność zgotowania nieprzyjacielowi prawdziwie gorącego przyjęcia! W jego ciele znajduje się zbiornik z wodnym roztworem zawierającym 25% nadtlenku wodoru H_2O_2 i 10% hydrochinonu. Chinon jest związkiem o pierścieniowej budowie i wzorze $C_6H_4O_2$, natomiast wzór chemiczny hydrochinonu to $C_6H_4(OH)_2$. Związki te znalazły przemysłowe zastosowanie w fotografii oraz w garbarstwie. W trakcie wyładowania część roztworu zostaje zmieszana z enzymami, dzięki którym zachodzą następujące

Rozwiązanie zadania F 530.
Niech h będzie wysokością, na której znajduje się poszukiwany otwór. Przy wypływie z pierwszego otworu cząsteczki wody uzyskują prędkość poziomą równą

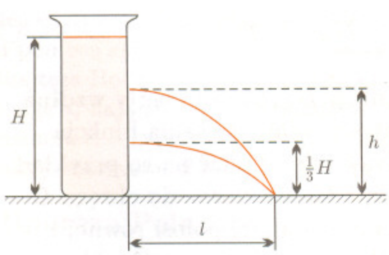
$$v = \sqrt{2g\left(H - \frac{1}{3}H\right)} = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}.$$

Czas ruchu cząsteczki wody w strumieniu wynosi $t = \sqrt{\dfrac{2H}{3g}}$, a zasięg poziomy strumienia

$$s = vt = \frac{2}{3}H\sqrt{2}.$$

Podobnie zasięg drugiego strumienia wynosi

$$s = 2\sqrt{(H-h)h}.$$



Ponieważ zgodnie z warunkiem zadania zasięgi obu strumieni mają być równe, otrzymujemy

$$\frac{2}{3}H\sqrt{2} = 2\sqrt{(H-h)h},$$

co po odpowiednich przekształceniach daje nam równanie na h

$$h^2 - Hh + \frac{2}{9}H^2 = 0.$$

Rozwiązania tego równania to $h_1 = \frac{1}{3}H$ i $h_2 = \frac{2}{3}H$. Pierwsze rozwiązanie odpowiada danemu strumieniowi, drugie jest szukanym wynikiem.