Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 290 (WT=2,91) i 291 (WT=2,16)
z numeru 1/2000

Tomasz Wietecha	– Tarnów	45,36
Jarosław Łazuka	– Warszawa	33,58
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	32,24
Aleksander Surma	– Myszków	31,54
Marek Wójcicki	– Szczecin	28,23
Artur Arciszewski	– Kielce	26,43
Grzegorz Miłoś	– Mielec	24,40

Siódmym z kolei Weteranem **Klubu 44 F** został pan Tomasz Wietecha.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 391 (WT=2,96) i 392 (WT=1,24)
z numeru 12/1999

Rafał Pikuła	– Wrocław	42,57
Jarosław Łazuka	– Warszawa	41,06
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,18
Michał Adamaszek	– Kęty	38,77
Jerzy Witkowski	– Radlin	38,52
Andrzej Jóźwik	– Kielce	37,72

400. Niech $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi podane warunki. Mamy więc równania

$$f'g + fg' = f'g' \tag{1}$$

oraz $(f'g')' = ((fg)')' = f''g''$, czyli

$$f''g' + f'g'' = f''g''; \tag{2}$$

wiemy ponadto, że w pewnych punktach pochodna $(fg)'$ (równa iloczynowi $f'g'$) przyjmuje wartości niezerowe.

Niech J będzie dowolnym maksymalnym przedziałem, na którym $f'g'\neq 0$ (czyli *składową spójną* otwartego niepustego zbioru $\{x\colon f'(x)g'(x)\neq 0\}$). Rozważając równanie (1) na przedziale J, możemy je podzielić stronami przez niezerowy iloczyn $f'g'$, otrzymując zależność $(f/f')+(g/g')=1$; istnieje zatem funkcja $h\colon J\to\mathbb{R}$ mająca ciągłą pochodną i taka, że

$$\frac{f}{f'}=\frac{1}{2}-h,\qquad \frac{g}{g'}=\frac{1}{2}+h\qquad \text{na przedziale } J. \tag{3}$$

Różniczkując stronami równania $(\frac12-h)f'=f$ oraz $(\frac12+h)g'=g$ dostajemy związki

$$(\tfrac12-h)f''=(1+h')f',\qquad (\tfrac12+h)g''=(1-h')g'\qquad \text{na przedziale } J.$$

Mnożymy obie strony równania (2) przez $(\frac12-h)(\frac12+h)$, uwzględniając powyższe związki:

$$(\tfrac12+h)(1+h')f'g'+(\tfrac12-h)(1-h')g'f'=(1+h')(1-h')f'g'\qquad \text{na } J.$$

Po podzieleniu przez $f'g'$ i wymnożeniu wyrażeń w nawiasach otrzymujemy równanie

$$(2h+h')\cdot h'=0\qquad \text{na przedziale } J. \tag{4}$$

Weźmy pod uwagę zbiór otwarty $U=\{x\in J\colon h'(x)\neq 0\}$. Jeżeli jest on pusty, to $h=\mathrm{const}$ na przedziale J; prawe strony wzorów (3) są wielkościami stałymi, ich suma wynosi 1, a żadna z nich nie jest zerem (równość $f/f'\equiv 0$ nie jest możliwa). Możemy więc oznaczyć te stałe przez $1/p$ oraz $1/q$; równania (3) przybierają postać $f'=pf$, $g'=qg$, i wobec tego

$$\begin{cases} f(x)=Ae^{px}, \quad g(x)=Be^{qx} \quad \text{dla } x\in J;\\ A,\ B,\ p,\ q\ \text{– stałe } \neq 0;\quad \dfrac1p+\dfrac1q=1.\end{cases} \tag{5}$$

Rozpatrzymy teraz przypadek, gdy zbiór U jest niepusty. Niech I będzie dowolnym maksymalnym przedziałem zawartym w tym zbiorze (czyli jego spójną składową). Z równania (4) wynika, że na przedziale I zachodzi równość $h'=-2h$, więc

$$h(x)=\tfrac12 Ce^{-2x}\qquad \text{dla } x\in I \tag{6}$$

(C – stała; czynnik $\frac12$ wprowadziliśmy dla wygody dalszych rachunków; $C\neq 0$, bo $h'\neq 0$ na I).

Gdyby któryś z końców przedziału I był liczbą α, należącą do przedziału J, wówczas z ciągłości funkcji h' na J wynikałaby równość $h'(\alpha)=-Ce^{-2\alpha}$; natomiast z maksymalności przedziału I (jako składowej zbioru U) wynikłaby równość $h'(\alpha)=0$. Sprzeczność dowodzi, że oba końce przedziału I muszą być jednocześnie końcami przedziału J; to znaczy, że $I=J$, więc wzór (6) jest słuszny dla wszystkich $x\in J$. Równania (3) przybierają postać

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1-Ce^{-2x}}{2}=\frac{e^{2x}-C}{2e^{2x}},\qquad \frac{g(x)}{g'(x)}=\frac{e^{2x}+C}{2e^{2x}}\qquad \text{dla } x\in J.$$

Przyjmijmy: $\varphi(x)=e^{2x}-C$, $\psi(x)=e^{2x}+C$. Przepisując otrzymane równania jako $f/f'=\varphi/\varphi'$ oraz $g/g'=\psi/\psi'$ wnosimy, że

$$\begin{cases} f(x)=A(e^{2x}-C),\quad g(x)=B(e^{2x}+C)\quad \text{dla } x\in J;\\ A,\ B,\ C\ \text{– stałe } \neq 0.\end{cases} \tag{7}$$

Uzyskane w rozważonych przypadkach wzory (5) i (7) przedstawiają funkcje f i g na przedziale J.

Przypuśćmy, że przedział J nie wypełnia całego zbioru $\mathbf{R}$, a więc któryś z jego końców jest liczbą rzeczywistą β. Powtarzamy wcześniejsze rozumowanie: z ciągłości funkcji f' i g' wynika, że

$$f'(\beta)g'(\beta)=\begin{cases} pqABe^{(p+q)\beta} & \text{dla } f,\ g \text{ danych wzorami (5)},\\ 4ABe^{4\beta} & \text{dla } f,\ g \text{ danych wzorami (7)};\end{cases}$$

jest to wartość niezerowa. Natomiast z maksymalności przedziału J jako składowej zbioru $\{x\colon f'(x)g'(x)\neq 0\}$ wynika, że $f'(\beta)g'(\beta)=0$. Sprzeczność dowodzi, że $J=\mathbf{R}$. Tak więc wzory (5) oraz (7) – teraz już dla $x\in\mathbf{R}$ – przedstawiają wszystkie pary funkcji, o jakie chodzi. Łatwo sprawdzić, że każda taka para f, g istotnie ma wymagane własności.

Rozwiązanie zadania M 927.
Niech K, L, M, N będą środkami krawędzi AB, BC, CD, DA odpowiednio. Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, którego pary boków są równoległe do krawędzi AC i BD. Równość $KM=LN$ jest równoważna temu, że $KLMN$ jest prostokątem, a to z kolei jest równoważne prostopadłości krawędzi BD i AC. Stąd i z zadania **925** wynika teza.