Łańcuchy Markowa a ryzyko kredytowe

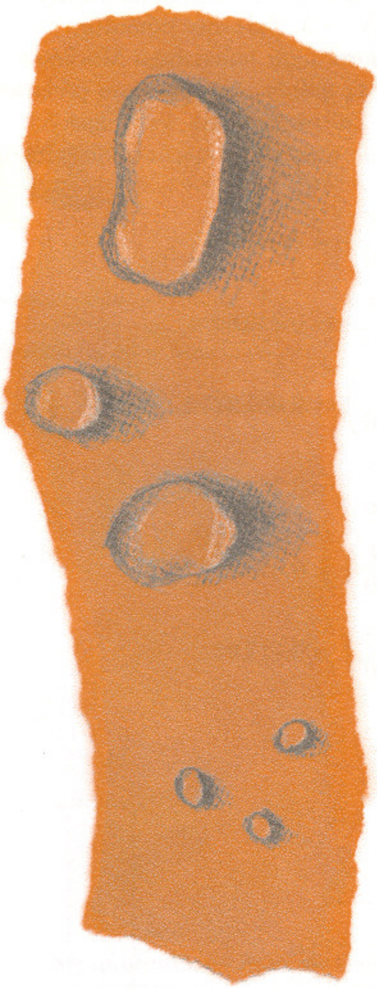
Wojciech KURYŁEK

Istnieje oczywista asymetria informacyjna między bankami a kredytobiorcami. Bank udzielając kredytu ponosi ryzyko, gdyż nie ma pewności w momencie podpisania umowy, że należność zostanie w całości i terminowo spłacona.

Banki, radząc sobie z tym problemem, zaczęły na bazie dostępnych im informacji klasyfikować kredytobiorców ze względu na prawdopodobieństwo ich potencjalnego niewywiązania się ze zobowiązań.

Możemy zatem przyjąć, że każdemu kredytobiorcy bank przypisuje pewną ocenę (numer ratingowy), będącą liczbą ze zbioru $\{1,\ldots,K\}$. Im wyższy numer ratingowy, tym większe prawdopodobieństwo niewywiązania się kredytobiorcy z umowy, a najwyższa K-ta klasa oznacza niewypłacalność kredytobiorcy. Załóżmy, że ocena taka przypisywana jest kredytobiorcom co kwartał. Co kwartał kredytobiorca ma więc szansę zmienić przypisany mu rating. Proces ten opisywać będziemy za pomocą tzw. jednorodnego łańcucha Markowa. Podejście takie pomoże nam w określeniu, jak będzie się zmieniał w sensie jakości kredytowej skład portfela kredytowego banku.

Łańcuch Markowa to ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$, w którym stan w danej chwili zależy jedynie od stanu w chwili poprzedniej.
W sposób bardziej formalny możemy zapisać, że dla $n=0,1,\ldots$ zachodzi $P(X_{n+1}\in A_{n+1}|X_n\in A_n,\ldots,X_0\in A_0)=P(X_{n+1}\in A_{n+1}|X_n\in A_n)$.
Mówimy, że łańcuch jest jednorodny, jeżeli prawdopodobieństwo przejść między stanami nie zależy od czasu, tj. dla $n=0,1,\ldots$ zachodzi $P(X_{n+1}\in A_{n+1}|X_n\in A_n)=P(X_1\in A_1|X_0\in A_0)$.



W rozpatrywanej przez nas sytuacji możemy przyjąć, że powyższy ciąg zmiennych losowych przyjmuje wartości ze zbioru $\{1,\ldots,K\}$. Prawdopodobieństwo tego, iż kredytobiorca w kolejnym okresie otrzyma ocenę j pod warunkiem, że w okresie poprzednim otrzymał ocenę i, oznaczmy przez p_{ij}, tj. $p_{ij}=P(X_1=j|X_0=i)$ dla $i,j=1,\ldots,K$. Dla wygody, prawdopodobieństwa przejścia jednorodnego łańcucha Markowa możemy zapisać w formie macierzy $\Pi=(p_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$. Macierz tę nazywamy *macierzą przejścia*. Niech ponadto $v^1=(v^1_1,\ldots,v^1_K)$ oznacza rozkład ratingów w pierwszym z analizowanych kwartałów, tzn. niech liczba v^1_i określa, jaki procent wszystkich kredytobiorców miał w tym okresie ocenę i.

Jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem przyszłego rozkładu ratingów w portfelu kredytowym banku. Jak łatwo zauważyć, wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany w n-tym kwartale kredytobiorca będzie miał przypisany j-ty rating, wyraża się jako

$$v^n_j=\sum_{i=1}^{K}v^{n-1}_i p_{ij}.$$

Rozkład $v^n=(v^n_1,\ldots,v^n_K)$ daje się więc w łatwy sposób przedstawić, wykorzystując macierz przejścia Π

$$v^n=v^{n-1}\Pi.$$

Łatwo zauważyć, że

$$v^n=v^1\,(\Pi)^{n-1},$$

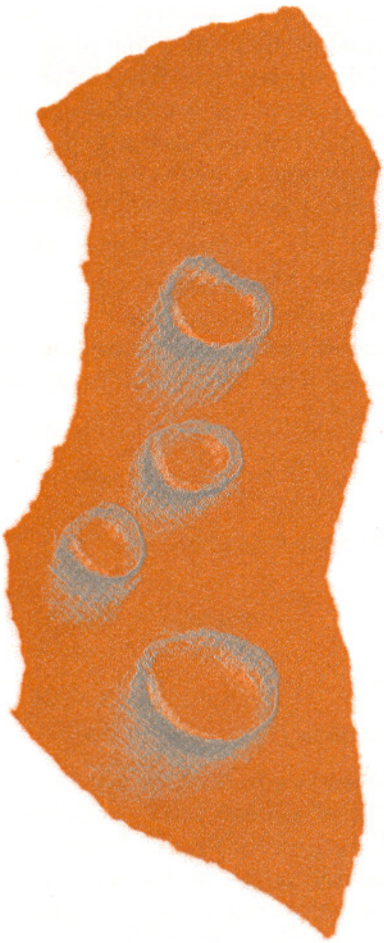
gdzie $(\Pi)^{n-1}$ oznacza $n-1$ potęgę macierzy przejścia Π.

Występujące w macierzy przejścia prawdopodobieństwa warunkowe p_{ij} dla $i,j=1,\ldots,K$, szacuje się na podstawie danych z przeszłości przez określenie częstości przechodzenia kredytobiorców między różnymi ratingami. Zatem w prosty sposób można określić na podstawie pewnej zaobserwowanej w przeszłości dynamiki zachowań kredytobiorców przyszły rozkład ratingów w portfelu kredytowym banku. Zilustruje to przedstawiony dalej przykład.

Rozważmy bank udzielający długoterminowych kredytów inwestycyjnych. Bank sporządza co kwartał rating każdego z kredytobiorców, klasyfikując go jako kredytobiorcę o dobrej kondycji finansowej (D), wypłacalnego kredytobiorcę o złej sytuacji finansowej (Z) albo jako kredytobiorcę niewypłacalnego (N). Załóżmy, że w ostatnich trzech kwartałach obserwowaliśmy następujące zachowanie kredytobiorców:

Rating	I kw.	Zmiana ratingu	II kw.	Zmiana ratingu	III kw.	Zmiana ratingu
D	1500	D 1000 Z 500 N 0	1700	D 1100 Z 580 N 20	2000	D 1200 Z 750 N 50
Z	1400	D 400 Z 800 N 200	1300	D 320 Z 800 N 180	1380	D 380 Z 900 N 100
N	100	D 0 Z 0 N 100	300	D 0 Z 0 N 300	480	D 0 Z 0 N 480

Jak łatwo zauważyć na podstawie powyższej tabelki, liczba kredytów w portfelu banku zwiększa się z kwartału na kwartał, gdyż bank udziela nowych kredytów podmiotom znajdującym się w dobrej sytuacji finansowej. Wiedząc, że w chwili obecnej w portfelu banku znajduje się 1900 kredytów o ratingu D, 1650 kredytów o ratingu Z oraz 580 kredytów niewypłacalnych (N), należy określić rozkład ratingów w portfelu kredytowym banku za rok, zakładając, że liczba kredytów znajdujących się w portfelu banku pozostanie w ciągu tego roku stała.



Aby być zgodnym z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami, ponumerujmy ratingi w następujący sposób: $D \to 1$, $Z \to 2$, $N \to 3$. Załóżmy ponadto, że proces generujący zmiany ratingów jest jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy przejścia $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Macierz tę należy oszacować na podstawie obserwacji zamieszczonych w powyższej tabeli. Za oszacowania warunkowych prawdopodobieństw przejść przyjmujemy średnie częstości przechodzenia między ratingami:

$$\hat{p}_{11} = \frac{1}{3}\left(\frac{1000}{1500} + \frac{1100}{1700} + \frac{1200}{2000}\right) = 0{,}637\,91,$$

$$\hat{p}_{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{500}{1500} + \frac{580}{1700} + \frac{750}{2000}\right) = 0{,}349\,84,$$

$$\hat{p}_{13} = \frac{1}{3}\left(\frac{0}{1500} + \frac{20}{1700} + \frac{50}{2000}\right) = 0{,}001\,225\,5,$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{1}{3}\left(\frac{400}{1400} + \frac{320}{1300} + \frac{380}{1380}\right) = 0{,}269\,08,$$

$$\hat{p}_{22} = \frac{1}{3}\left(\frac{800}{1400} + \frac{800}{1300} + \frac{900}{1380}\right) = 0{,}613,$$

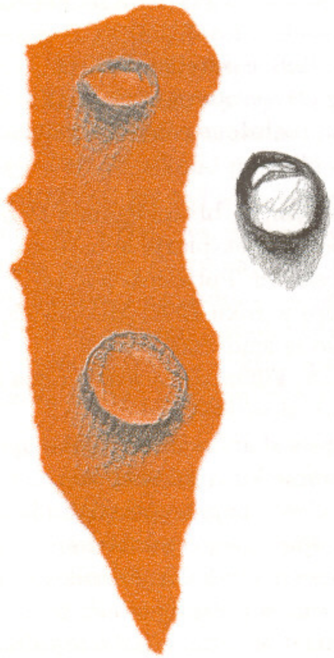
$$\hat{p}_{23} = \frac{1}{3}\left(\frac{200}{1400} + \frac{180}{1300} + \frac{100}{1380}\right) = 0{,}117\,93,$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{1}{3}\left(\frac{0}{100} + \frac{0}{300} + \frac{0}{480}\right) = 0,$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{1}{3}\left(\frac{0}{100} + \frac{0}{300} + \frac{0}{480}\right) = 0,$$

$$\hat{p}_{33} = \frac{1}{3}\left(\frac{100}{100} + \frac{300}{300} + \frac{480}{480}\right) = 1.$$

Jak łatwo spostrzec, stan niewypłacalności (3) jest stanem *pochłaniającym*, tj. takim, którego prawdopodobieństwo opuszczenia jest równe zeru.



Oznaczmy przez $\hat{\Pi} = (\hat{p}_{ij})_{i,j=1,2,3}$ otrzymany estymator macierzy przejścia Π. Ma on następującą postać

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 0{,}637\,91 & 0{,}349\,84 & 0{,}001\,225\,5 \\ 0{,}269\,08 & 0{,}613 & 0{,}117\,93 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponadto z treści zadania wiemy, że obecny rozkład ratingów wyraża się jako

$$v^1 = \left(\frac{1900}{1900+1650+580}, \frac{1650}{1900+1650+580}, \frac{580}{1900+1650+580} \right),$$

czyli

$$v^1 = (0{,}460\,05,\ 0{,}399\,52,\ 0{,}140\,44)\,.$$

Rozkład ratingów za rok (po czterech kwartałach) możemy określić jako

$$v^5 = v^1(\hat{\Pi})^4.$$

Pozostawiając trud obliczenia czwartej potęgi macierzy $\hat{\Pi}$ lubiącym rachunki Czytelnikom, podaję tylko końcowy wynik

$$v^5 = (0{,}313\,84,\ 0{,}342\,55,\ 0{,}343\,64)\,.$$

Warto wspomnieć, że w stosowaniu wyżej wymienionej metody kluczową rolę odgrywało założenie o tym, iż w ciągu najbliższego roku nie zwiększy się liczba kredytobiorców. Założenie to wydaje się jednak mało realistyczne. Powstaje więc pytanie: jaki będzie rozkład kredytów za rok, zakładając utrzymanie się dotychczasowej średniej stopy wzrostu liczby kredytów udzielanych kredytobiorcom znajdującym się w dobrej sytuacji finansowej? Odpowiedź pozostawiam zainteresowanym Czytelnikom.

Artykuł ten chciałbym zakończyć następującą konkluzją: nie sposób dziś studiować na przyzwoitym poziomie zarówno ekonomii, jak i finansów, nie mając odpowiedniego przygotowania formalnego. Przygotowanie takie daje na pewno studiowanie matematyki. Stąd też coraz bardziej popularne staje się równoległe studiowanie powyższych kierunków i matematyki.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 925. Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwie jego przeciwległe krawędzie są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 6

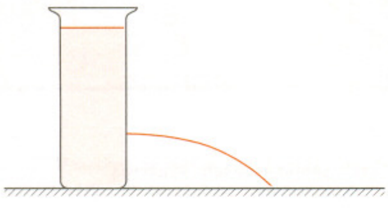
Czworościan nazywamy *ortocentrycznym*, jeśli jego wysokości przecinają się w jednym punkcie.

M 926. a) Udowodnić, że sumy kwadratów dwóch par przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie trzeciej pary są prostopadłe.
b) Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów przeciwległych krawędzi są równe.
Rozwiązanie na str. 7

M 927. Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi są równej długości.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 529. Z sikawki strażackiej wypływa strumień wody pod kątem $\alpha = 35°$ do poziomu. Struga wody pada w odległości $l = 12$ m od sikawki. Ile wody wylewa się w ciągu jednej minuty, jeśli pole przekroju otworu wynosi $S = 1\ \mathrm{cm}^2$? Opór powietrza pomijamy.
Rozwiązanie na str. 16



F 530. Z otworu wywierconego w bocznej ściance naczynia na poziomie równym jednej trzeciej słupa wody w naczyniu (rys.) wycieka strumień wody. Na jakiej innej wysokości trzeba wywiercić drugi otwór, aby zasięg obu strumieni był jednakowy?
Rozwiązanie na str. 11