Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

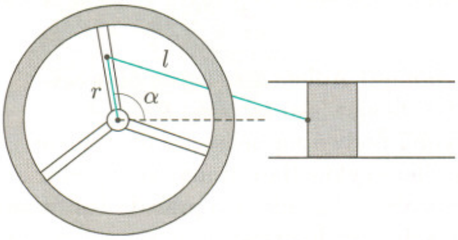
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2000

Przypominamy treść zadań:



294. Ciało o masie m („tłok") może się poruszać wzdłuż linii prostej i jest połączone przegubowo za pośrednictwem nieważkiego pręta z kołem zamachowym o momencie bezwładności I (rys.). Dane są: długość pręta l oraz odległość r punktu jego zamocowania na kole zamachowym od osi tego koła. „Tłok" i koło poruszają się bez tarcia. Jeśli maksymalna prędkość kątowa koła jest równa ω_1, to ile wynosi jego minimalna prędkość kątowa ω_2? Obliczenia wykonać dla $l = 2r$.

295. Mikroskop tworzy obraz powiększony 300-krotnie w odległości dobrego widzenia (25 cm) od oka obserwatora. Jaka powinna być dokładność ustawienia mikroskopu względem przedmiotu, jeśli odległość obrazu od oka ma nie różnić się od podanej wartości 25 cm więcej niż o 5 cm?

294. Odległość „tłoka" od osi koła jest dana wzorem

$$x = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha},$$

gdzie α jest kątem obrotu koła (rys.). Różniczkując wyrazimy prędkość v „tłoka" przez prędkość kątową koła $\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$:

$$v = -\omega r\left(\sin\alpha + \frac{r\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Oznaczmy wyrażenie w nawiasie przez $f(\alpha)$; oprócz kąta α funkcja ta zależy także od stosunku l/r. Zgodnie z zasadą zachowania energii wielkość $I\omega^2 + mv^2 = \omega^2[I + mr^2 f^2(\alpha)]$ pozostaje stała w czasie ruchu układu, a ponieważ minimalną wartością funkcji f jest 0 (dla $\alpha = 0$), więc

$$\omega^2_{\max} I = \omega^2_{\min}(I + mr^2 f^2_{\max}).$$

Wartość $f_{\max}$ można wyznaczyć prawdopodobnie tylko numerycznie – dla $l/r = 2$ wynosi ona $f_{\max} = 1{,}123$. Podstawiając ją do powyższego równania, otrzymujemy rozwiązanie.

295. Różniczkując równanie soczewkowe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$, otrzymujemy $\left|\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right|$, czyli iloraz $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (stosunek przesunięcia obrazu do przesunięcia przedmiotu) jest równy kwadratowi powiększenia p soczewki. Tak jest zarówno dla obiektywu (1), jak i dla okularu (2):

$$\left|\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}\right| = p_1^2, \quad \left|\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}\right| = p_2^2.$$

Ponieważ przedmiotem dla okularu jest obraz wytworzony przez obiektyw, więc $|\mathrm{d}y_1| = |\mathrm{d}x_2|$, a stąd

$$\left|\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_1}\right| = (p_1 p_2)^2,$$

gdzie $p_1 p_2$ jest danym całkowitym powiększeniem. Jeśli przyjmiemy, że przesunięcia są dostatecznie małe, aby słuszne były obliczenia oparte na rachunku różniczkowym, to kładąc $|\mathrm{d}y_2| = 5$ cm, otrzymujemy $|\mathrm{d}x_1| \approx 0{,}6$ m.

* * * * * * *

★ Miesiąc gwiazdowy (czas obiegu Księżyca wokół Ziemi) wynosi $G = 27{,}321\,661$ dni, a miesiąc synodyczny (odstęp czasu między kolejnymi np. nowiami) $S = 29{,}530\,589$ dni. Czy te liczby są nam przez przyrodę dane przypadkowo? Otóż są one zależne. Mianowicie 360°/G to prędkość kątowa Księżyca w układzie inercjalnym, 360°/S to jego prędkość w układzie obracającym się w takim tempie, w jakim Słońce (pozornie) obiega Ziemię w ciągu roku gwiazdowego, a więc z prędkością 360°/R, gdzie $R = 365{,}256\,362$ dni. A prędkości kątowe też się dodają i odejmują, dlatego

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{G} - \frac{1}{R}.$$

Sprawdź!

★ Liczby bliźniacze to liczby pierwsze różniące się o 2. W 1998 roku rekordowo wielką taką parę tworzyły $242\,206\,083 \cdot 2^{38\,880} \pm 1$. Do dziś nie wiadomo, czy istnieją największe liczby bliźniacze, czy też jest takich par nieskończenie wiele. Nietrudno natomiast przekonać się, że „trojaczków" wśród liczb pierwszych (czyli takich trzech, które kolejno różnią się o 2) jest skończenie wiele, a dokładniej 1. Dlatego trojaczkami nazywa się trójki liczb postaci p, $p+2$, $p+6$ oraz postaci p, $p+4$, $p+6$; proszę wskazać kilka przykładów.

★ Każda liczba całkowita nieujemna może być liczbą osi symetrii figury płaskiej. Dla figur przestrzennych liczbami ich osi mogą być tylko 0, nieskończoność i liczby nieparzyste.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2000

Przypominamy treść zadań:

397. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich $x \geq 0$. Udowodnić, że dla pewnej liczby naturalnej n wielomian $Q(x) = (1+x)^n P(x)$ ma wszystkie współczynniki nieujemne.

398. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą liczbę całkowitą, nie przekraczającą $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1}$.

397. Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy $P(x)$ jest trójmianem kwadratowym bez pierwiastków rzeczywistych: $P(x) = x^2 - px + q$, $p^2 < 4q$. Dla każdej liczby naturalnej n mamy wówczas

$$(1+x)^n P(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\Big)(x^2 - px + q) = \sum_{k=0}^{n+2} c(n,k)\, x^k,$$

gdzie

$$c(n,k) = \binom{n}{k-2} - p\binom{n}{k-1} + q\binom{n}{k}$$

(przyjmujemy $\binom{n}{j} = 0$ dla $j < 0$ oraz dla $j > n$). Wykażemy, że dla dostatecznie dużych n współczynniki $c(n,k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n+2)$ są nieujemne.

Dla $k=0$, $k=1$, $k=n+1$, $k=n+2$ wyrażenie $c(n,k)$ przyjmuje odpowiednio wartości q, $qn-p$, $n-p$, 1; są to liczby nieujemne dla dużych n. Gdy zaś $k = 2, 3, \ldots, n$, wówczas

$$c(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k+2)!} \cdot [Ak^2 - (Bn+C)k + q(n^2+3n+2)], \tag{1}$$

gdzie $A = 1+p+q$, $B = p+2q$, $C = 1+2p+3q$. Przekształcamy wyrażenie w nawiasie kwadratowym do postaci

$$A\Big(k - \frac{Bn+C}{2A}\Big)^2 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma, \tag{2}$$

gdzie

$$\alpha = q - \frac{B^2}{4A}, \qquad \beta = 3q - \frac{2BC}{4A}, \qquad \gamma = 2q - \frac{C^2}{4A}.$$

Liczby $A = 1+p+q = P(-1)$ oraz $\alpha = (4q-p^2)/4A$ są dodatnie. Jeśli zatem n jest dostatecznie dużą liczbą naturalną, to wartość wyrażenia (2) (więc i (1)) jest dodatnia dla $k = 2, 3, \ldots, n$. To dowodzi tezy w rozważanym przypadku $(P(x) = x^2 - px + q)$.

W przypadku ogólnym rozkładamy wielomian P na iloczyn czynników stopnia nie większego niż 2. Czynniki liniowe mają współczynniki dodatnie (bo wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu P są ujemne). Natomiast każdy czynnik będący nierozkładalnym trójmianem kwadratowym można pomnożyć przez pewien czynnik postaci $(1+x)^m$, otrzymując – na mocy rozważonego wcześniej przypadku – wielomian o współczynnikach nieujemnych. Zatem mnożąc wielomian P przez iloczyn wszystkich tych czynników $(1+x)^m$ (odpowiadających wszystkim kwadratowym czynnikom rozkładu P) otrzymujemy iloczyn wielomianów o współczynnikach nieujemnych. Taki iloczyn też jest oczywiście wielomianem o współczynnikach nieujemnych; jest to szukany wielomian Q. Stąd teza zadania w przypadku ogólnym.

398. Ciągi o wyrazach $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ oraz $b_n = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ są zbieżne do wspólnej granicy e. Wiadomo, że pierwszy z nich jest rosnący, a drugi malejący. Zatem dla $n \geq 2$ zachodzi nierówność $a_n < \mathrm{e} < b_{n-1}$, czyli

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{\mathrm{e}} < 1 + \frac{1}{n-1};$$

lub równoważnie:

$$n - 1 < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1} < n.$$

To znaczy, że dla $n \geq 2$ największa liczba całkowita, nie przekraczająca odwrotności różnicy $\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1$, jest równa $n-1$ (wynik prawidłowy także dla $n=1$).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 389 (WT=2,37) i 390 (WT=1,91) z numeru 11/1999

Andrzej Daniluk	– Kraków	45,55
Rafał Pikuła	– Wrocław	41,33
Jarosław Łazuka	– Warszawa	39,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,94
Michał Adamaszek	– Kęty	37,78
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,62

Pan Daniluk zostaje dziewięćdziesiątym członkiem **Klubu 44 M**.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 288 (WT=2,46) i 289 (WT=3,91) z numeru 12/1999

Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,32
Aleksander Surma	– Myszków	31,25
Jarosław Łazuka	– Warszawa	28,51
Artur Arciszewski	– Kielce	26,43
Marek Wójcicki	– Szczecin	24,61
Grzegorz Miłoś	– Mielec	21,95
Tomasz Rudny	– Warszawa	20,86