7/00 (31)

Γlimatias $_{n\to\infty}$

O liczbie π (1)

Z okazji Γ-limatiasu numer $[10\pi] = [\pi^3]$ zamieszczonego w *Delcie* $[100\pi]$ małe co nieco o liczbie π.

Raz w maju, w drugą niedzielę,
Pi liczył cyfry pan Felek.
Pomnożył, wysumował,
Cyferki zanotował,
Ale ma ich niewiele.

Wierszyki pozwalające zapamiętać początkowe cyfry rozwinięcia liczby π najłatwiej pisać, gdy używa się układu dziesiątkowego. W takich wierszykach cyfry liczby π są reprezentowane przez liczby liter w kolejnych wyrazach, choć pewien problem pojawia się z zerem. Jednak w układzie dziesiątkowym zero pojawia się w rozwinięciu π dopiero na 32-gim miejscu po przecinku. W układach o podstawie mniejszej niż 8 jest wprost fatalnie – zero pojawia się już na pierwszym miejscu po przecinku. Dalej jest lepiej, ale układ dziesiątkowy jest bezkonkurencyjny wśród układów o podstawie nie przekraczającej 16.

8	3
9	10
10	32
11	5
12	5
13	5
14	19
15	16
16	13

Liczba π w układzie dwójkowym

Liczba π zapisana w układzie dwójkowym ma przed przecinkiem dwie jedynki, ale po przecinku zdecydowanie woli zera. Jak zmierzyć te preferencje? Najodpowiedniejsza wydaje się funkcja $d(n) = z(n) - j(n)$, gdzie $z(n)$ jest liczbą zer wśród początkowych n cyfr po przecinku rozwinięcia dwójkowego liczby π, a $j(n)$ jest liczbą jedynek. Jeśli d jest dodatnia, to znaczy, że zer jest więcej niż jedynek.

Obliczając wartości $d(n)$ dla początkowych liczb naturalnych n stwierdzamy, że z nielicznymi wyjątkami przedstawionymi obok przyjmuje ona wartości dodatnie.

n	$d(n)$
16	0
18	0
19	-1
20	0
21	-1
22	0
23	-1
24	0
25	-1
26	0

Sprawdzając początkowych 100 cyfr stwierdzamy, że aż 60 z nich to zera. 60% zer wśród 100 cyfr to dużo. Mamy przy tym $d(100) = 20$.

Oczekiwać należy, że odsetek zer będzie zbliżać się do 50 wraz ze wzrostem liczby cyfr, którym się przyglądamy.

Bierzemy więc 200 cyfr. Zer jest 61%. Przy tym $d(200) = 44$, więc d oddala się od zera.

Przy 300 cyfrach odsetek zer spada wprawdzie do $58,33\%$, ale $d(300) = 50$.

Po osiągnięciu rekordowej wartości $d(310) = 58$ następuje spadek do $d(782) = 6$. Odsetek zer jest wtedy na poziomie $50,38\%$.

I to by było na tyle, można powiedzieć. Liczby zer i jedynek prawie się wyrównały, przedstawienie skończone. No to jeszcze zostańmy na chwilę i zobaczmy jak d spada poniżej zera.

Bierzemy 1000 cyfr. Stwierdzamy, że $d(1000) = 24$, co oznacza 51,2% zer.

Idziemy do 2000 cyfr. Po drodze spotykamy najmniejsze wartości $d(1143) = d(1149) = d(1181) = 9$, by skończyć na rekordowym $d(2000) = 68$, które oznacza 51,7% zer. Widać, że jednak π lubi te zera, oj lubi.

Wędrujemy dalej aż do 3000 cyfr. Stwierdzamy, że $d(3000) = 92$, co daje 51,53% zer. Po drodze stwierdzamy, że d nie spada poniżej 43 i odnotowujemy rekord $d(2979) = d(2987) = 99$.

Dojście do 4000 cyfr niewiele zmienia. Mamy bowiem $d(4000) = 102$, co świadczy o 51,275% zer. Po drodze odsetek zer nie spada nigdy poniżej 51,13%, a d poniżej 85. Rekordowa wartość d wynosząca 110 przyjmowana jest sześciokrotnie.

Przeglądamy piąty tysiąc cyfr. Nowy rekord $d(4083) = 115$ z odsetkiem zer powyżej 51,4%, a potem spadek do $d(5000) = 82$ z 50,82% zer. Po drodze minimum $d(4946) = 70$.

Ale wszystko ma swój koniec. Znajdujemy bowiem $d(6374) = 0$ oraz $d(6375) = -1$. A potem $d(6628) = -18$.

Przeglądając 100 000 cyfr stwiedzamy, że rekord $d(4083) = 115$ nie zostaje pobity, podczas gdy $d(85\,915) = -405$. Przy tym $d(58\,734) = 0$ jest ostatnią nieujemną wartością.

Najgorsze przybliżenia liczby π (2)

Logarytm. Wykorzystujemy rozwinięcie zespolonej funkcji logarytmicznej w szereg potęgowy:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \cdot (-1)^{n+1}}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \tag{3.14}$$

Powyższy wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb zespolonych $z \neq 1$ takich, że $|z| \leq 1$.

Czytelnikowi niezaznajomionemu z teorią funkcji zespolonych w zupełności wystarczy ogólna znajomość liczb zespolonych oraz wzór

$$\log z = \ln |z| + \operatorname{Arg} z \cdot i ,$$

gdzie $\operatorname{Arg} z$ jest argumentem liczby zespolonej z.

Kładąc $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ we wzorze (3.14) otrzymujemy

$$\log(1+z) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{\pi}{3} i ,$$

skąd

$$\pi = 3i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n \cdot (-1)^n}{n} = 3i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n}{n} .$$

Liczba π (rzeczywista !) jest wyrażona za pomocą szeregu o wyrazach zespolonych.

Uwzględnienie 10 wyrazów powyższego szeregu daje przybliżenie

$$\pi \approx \frac{1023\sqrt{3}}{560} - \frac{473\, i}{1680} \approx 3{,}16409 - 0{,}28155 i .$$

Część rzeczywista liczby π jest przybliżona nie najgorzej, błąd jest mniejszy od 0,03. Trochę pozostawia do życzenia przybliżenie części urojonej.

Przy uwzględnieniu 1000 wyrazów otrzymujemy przybliżenie $\pi \approx 3{,}1415952 - 0{,}0029985 i$ zgodne z dokładną wartością π do piątego miejsca po przecinku. Ale tylko w zakresie części rzeczywistej, bo urojona część liczby π różni się już na trzecim miejscu. Dodanie 1001-szego wyrazu poprawia przybliżenie części urojonej, ale część rzeczywista jest o wiele mniej imponująca, gdyż dostajemy $\pi \approx 3{,}138999768 - 0{,}001499994 i$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl