ustalenia wymiaru zbioru A z podkowy Smale'a, przyjmując $k = 6^j$. Wówczas $N(k) = 2^j 6^j = 12^j$. Wskazuje to na wymiar $\log 12^j / \log 6^j = \log 12 / \log 6 = 1 + \log_6 2$. Nieco bardziej wyrafinowane rachunki wykazują, że granica (3) faktycznie istnieje. Wymiar jest zawarty między 1 a 2, co odpowiada temu, że zbiór A jest za mały jak na dwa wymiary, lecz za duży na jeden. Zbiory o wymiarze różnym od liczby całkowitej zwane są *fraktalami*. Fraktale mają często własność samopodobieństwa polegającą na tym, że ich wycinki w dowolnie małych skalach po powiększeniu są podobne do całego zbioru. Ma tę własność zbiór A, w którym deseń, składający się z linii i dziur, powtarza się we wszystkich skalach. Współczesny matematyk, Benoit Mandelbrot, znajduje fraktale w wielu zjawiskach naturalnych i modelach matematycznych. Wspomniałem, na przykład, o analogii z pierścieniami Saturna. Wyjaśnieniem powszechnej obecności fraktali może być fakt, że są one generowane przez chaotyczne układy dynamiczne. Być może są to spekulacje. Niewątpliwie jednak popularyzacja fraktali przyczyniła się do lepszego zrozumienia teorii układów dynamicznych przez naukowców z innych dziedzin, jak i przez szersze kręgi społeczeństwa. Efektowne obrazy fraktali generowanych przez nieliniowe chaotyczne układy dynamiczne można znaleźć w Internecie pod adresem `http://www.cnam.fr/fractals/mandel1.html`.

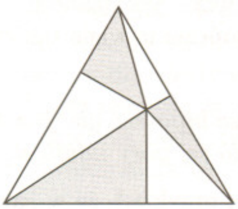
Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

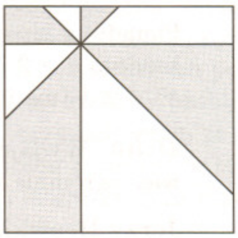
M 919. Wewnątrz trójkąta równobocznego wybrano pewien punkt, a następnie połączono go z wierzchołkami trójkąta oraz jego rzutami na boki trójkąta (rys. 1). Wykazać, że suma pól zacieniowanych trójkątów równa jest sumie pól niezacieniowanych trójkątów.
Rozwiązanie na str. 2

M 920. Przez punkt wewnętrzny kwadratu poprowadzono proste równoległe do jego boków i przekątnych (rys. 2). Wykazać, że suma pól figur zacieniowanych jest równa sumie pól figur niezacieniowanych.
Rozwiązanie na str. 6

M 921. W trapezie równoramiennym poprowadzono przekątne oraz wysokości z wierzchołków górnej podstawy (mniejszej, rys. 3). Wykazać, że suma pól trójkątów szarych jest równa polu pięciokąta kolorowego.
Rozwiązanie na str. 7



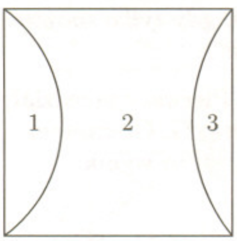
Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 4

F 525. Promień krzywizny wypukłej powierzchni soczewki wynosi 100 cm, a wklęsłej 20 cm. Czy jest to soczewka skupiająca czy rozpraszająca? Współczynnik załamania materiału soczewki wynosi 1,6.
Rozwiązanie na str. 8

F 526. Z płytki szklanej płasko-równoległej wykonano trzy soczewki (rys. 4). Okazało się, że ogniskowa soczewek 1 i 2, ściśle do siebie przylegających, jest równa F, a soczewek 2 i 3 – f. Zakładając, że soczewki są cienkie, znaleźć ogniskową każdej z nich.
Rozwiązanie na str. 16

Hipoteza *abc*

***Delta**: Czy można w jednym zdaniu powiedzieć, co to jest hipoteza abc?*

Jerzy Browkin: W jednym zdaniu może nie, ale w kilku na pewno tak. Najpierw umówmy się, że dla danej liczby naturalnej n przez $r(n)$ będziemy oznaczać iloczyn wszystkich różnych dzielników pierwszych liczby n. Jeżeli liczba n jest bardzo duża w porównaniu z liczbą $r(n)$, to nazywać ją będziemy liczbą „bardzo złożoną". Za miarę tej złożoności możemy uznać liczbę

$$\frac{\log n}{\log r(n)}.$$

Mówiąc trochę mgliście można powiedzieć, iż hipoteza *abc* stwierdza, że jeśli c jest sumą dwóch względnie pierwszych liczb a i b, to liczba abc nie może być liczbą „bardzo złożoną".

***Delta**: W praktyce stosuje się pewnie bardziej ścisłe wysłowienie tego faktu...*

Jerzy Browkin: Oczywiście. Oto ono: Niech a oraz b będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, natomiast c ich sumą, tzn.

$$\mathrm{NWD}(a,b)=1 \quad \text{oraz} \quad a+b=c.$$

Niech ponadto

$$L(a,b)=\frac{\log c}{\log r(abc)},$$

gdzie $r(n)$ jest określone jak wyżej. Hipoteza *abc* stwierdza, że dla każdej liczby $q>1$ istnieje tylko skończenie wiele trójek a,b,c spełniających powyższe warunki i takich, że $L(a,b)>q$.

***Delta**: Czy hipoteza abc to tylko problem interesujący „sam w sobie", czy też jest ona powiązana z innymi twierdzeniami?*

Jerzy Browkin: Hipoteza *abc* ma wiele bardzo poważnych konsekwencji. Jest ona związana z teorią krzywych algebraicznych, a także z wieloma twierdzeniami teorii liczb, np. z Wielkim Twierdzeniem Fermata. Wynika z niej mianowicie, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n,x,y,z spełniających warunki: $n>3$ oraz $\mathrm{NWD}(x,y)=1$ i takich, że

$$x^n+y^n=z^n.$$

Wystarczy bowiem wziąć $a=x^n$, $b=y^n$ oraz $c=z^n$ i zauważyć, że

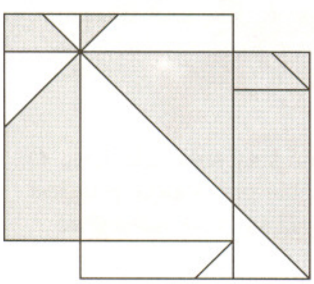
$$L(a,b)=\frac{n\log z}{\log r(xyz)}>\frac{n\log z}{\log(z^3)}=\frac{n}{3}\geq\frac{4}{3}.$$

Ponadto z hipotezy *abc* wynika – jak dowiódł J.H. Silverman – że dla każdego $a\geq 2$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że $a^{p-1}\not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

***Delta**: Wydaje się zatem, że hipoteza abc jest bardzo silna. Jej dowód może być więc ogromnie trudny. Co do tej pory udało się osiągnąć?*

Jerzy Browkin: Wiemy na przykład, że w każdym otoczeniu dowolnego punktu z przedziału $[\frac{1}{3},\frac{36}{37}]$ znajduje się nieskończenie wiele wartości $L(a,b)$ dla różnych trójek a,b,c, spełniających podane wcześniej założenia. Oczywiście dążymy do tego, by wykazać, że przedział takich punktów jest równy $[\frac{1}{3},1]$, ale obecnie nie wiemy nawet, czy sama liczba 1 ma rozważaną tu własność.

Rozwiązanie zadania M 920.
Rysunek pokazuje, jak z rozważanych części kwadratu złożyć na nowo kwadrat tak, by rozważana równość pól stała się oczywista.



***Delta**: Wartość $\frac{1}{3}$ jest dość oczywista w tym kontekście, gdy tylko spojrzy się na definicję $L(a,b)$. Wartość $\frac{36}{37}$ jest już bardziej zagadkowa...*

Jerzy Browkin: To po prostu kolejny etap „wyścigu". Pierwszy przedział, jaki uzyskano, był równy $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$. Potem wraz z M. Filasetą, G. Greavesem i A. Schinzlem poprawiliśmy go do $[\frac{1}{3},\frac{15}{16}]$. Przedział $[\frac{1}{3},\frac{36}{37}]$ to wynik G. Greavesa i A. Nitaja.

***Delta**: Z hipotezy abc wynika, że istnieje największa wartość $L(a,b)$ dla a,b określonych wyżej. Czy wartość ta jest znana?*