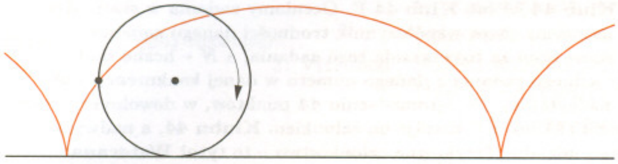
Pole pod cykloidą

Marek KORDOS

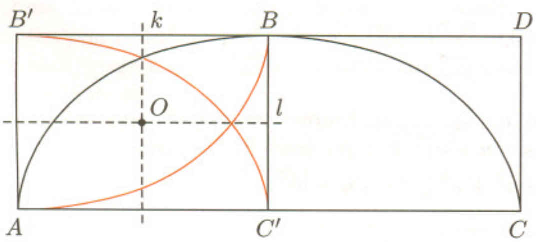
Gilles Roberval, XVII-wieczny matematyk francuski, pierwszy obliczył to pole, posługując się metodą podobną do tej, której użył Archimedes do obliczenia objętości kuli – badając przekroje – dziś tę metodę nazywa się zasadą



Rys. 1

Cavalieriego. Przypomnijmy, że cykloida to krzywa, którą zakreśla ustalony punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej. Składa się ona z łuków połączonych ostrzami. Długość łuku od ostrza do ostrza jest równa $8r$, co obliczył Christiaan Huygens, a każdy może to powtórzyć, sięgając po *Małą Deltę* z numeru 11/1999: dowód jest tam zakodowany w rysunku 7.

Łuk cykloidy od ostrza do ostrza w sposób naturalny mieści się w prostokącie o wymiarach $2r \times 2\pi r$: wysokość to średnica toczącego się okręgu, a długość to długość tego okręgu. Na rysunku 2 druga połowa cykloidy została przesunięta tak, aby się znalazła nad pierwszą połową. Ponieważ prosta BC' jest osią symetrii cykloidy, więc symetria względem równoległej do niej prostej k, przechodzącej przez środek O prostokąta $AC'BB'$, nakłada łuk $B'C'$ na pierwszą połowę cykloidy. Narysujmy jeszcze jeden obraz pierwszej połowy cykloidy, tym razem w symetrii względem O. Bez trudu stwierdzamy, że jest to równocześnie obraz symetryczny łuku $B'C'$ w symetrii względem prostej l, równoległej do AC' i przechodzącej przez O (faktycznie: wykonanie symetrii względem dwu prostych prostopadłych to symetria względem ich punktu przecięcia).

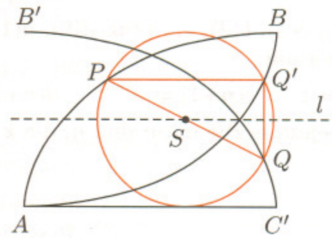


Rys. 2

Decydującym krokiem w obliczaniu pola pod cykloidą jest stwierdzenie, że pole otrzymanej soczewki AB jest równe polu koła ograniczonego przez okrąg wyznaczający cykloidę.

W tym celu dogodnie jest spojrzeć na łuk $B'C'$ w jeszcze jeden sposób – jest to krzywa, którą zakreśla antypodyczny (położony na drugim końcu średnicy) punkt do tego, który zakreśla wyjściową cykloidę.

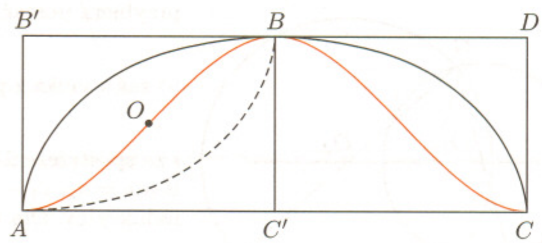
Faktycznie – jeśli punkt P zakreśli już pierwszą połowę cykloidy, to będzie u góry, w punkcie B, i podczas dalszego toczenia zakreśli łuk BC, taki sam, jak antypodyczny punkt Q (znajdujący się na początku ruchu u góry, w punkcie B') zakreśli podczas pierwszej połowy obrotu. Słowem, gdy punkt P będzie zakreślał łuk cykloidy od A do B, punkt Q będzie zakreślał łuk od B' do C'. Narysujmy więc (w dowolnym położeniu) okrąg wyznaczający wyjściową cykloidę (rys. 3). Punkt P znajduje się na górnym łuku AB, a antypodyczny punkt Q na łuku $B'C'$. Gdziekolwiek jednak nie narysowalibyśmy okręgu, jego środek S będzie leżał na prostej l. Prosta l jest więc osią symetrii narysowanego okręgu. Zatem obraz Q' punktu Q w symetrii względem l będzie dalej leżał na okręgu, a ponadto (patrz uwagi do rysunku 2) na dolnym łuku AB. Co więcej, ponieważ S jest środkiem PQ, więc (twierdzenie Talesa!) prosta l jest równoległa do PQ', czyli $PQ' \parallel AC'$.



Rys. 3

I tak stwierdziliśmy, że na każdej prostej równoległej do AC' okrąg wyznaczający cykloidę i soczewka AB mają przekrój tej samej długości. Dla kuli i wydrążonego walca Archimedes posłużył się wodą. Tu możemy wyobrażać sobie, że do naczynia w kształcie soczewki AB i w kształcie wyznaczającego cykloidę okręgu nalewamy sprawiedliwie „płaską wodę" – jej poziom będzie w obu naczyniach rósł tak samo, więc napełnią się też jednocześnie. Stąd mają jednakowe „płaskie objętości", czyli pola.

Właśnie, jak to się ma do obliczenia pola pod cykloidą? Otóż bardzo prosto. Roberval zastosował tu sinusoidę o osi l, mającą najniższe punkty w A i C, a najwyższy w B. Nazywał ją towarzyszką cykloidy. Łuk sinusoidy ma środek symetrii w punkcie O, podobnie jak prostokąt $AC'BB'$ i soczewka AB. Zatem sinusoida dzieli tak prostokąt, jak soczewkę, na połowy.



Rys. 4

Stąd pole pod (pierwszą) połową cykloidy to pół pola prostokąta plus pół pola soczewki. A więc całe pole pod cykloidą to całe pole prostokąta $AC'BB'$ – czyli $2r \cdot \pi r = 2\pi r^2$ – plus całe pole soczewki, czyli całe pole koła, a więc πr^2. Łącznie zatem pole pod jednym łukiem cykloidy od ostrza do ostrza to $3\pi r^2$.

Oczywiście sinusoida nie jest jedyną linią, jakiej można było użyć w tym rozumowaniu. Polecam znalezienie kilku innych linii nadających się na towarzyszkę cykloidy.