Hipoteza *abc*

***Delta**: Czy można w jednym zdaniu powiedzieć, co to jest hipoteza abc?*

Jerzy Browkin: W jednym zdaniu może nie, ale w kilku na pewno tak. Najpierw umówmy się, że dla danej liczby naturalnej n przez $r(n)$ będziemy oznaczać iloczyn wszystkich różnych dzielników pierwszych liczby n. Jeżeli liczba n jest bardzo duża w porównaniu z liczbą $r(n)$, to nazywać ją będziemy liczbą „bardzo złożoną". Za miarę tej złożoności możemy uznać liczbę

$$\frac{\log n}{\log r(n)}.$$

Mówiąc trochę mgliście można powiedzieć, iż hipoteza *abc* stwierdza, że jeśli c jest sumą dwóch względnie pierwszych liczb a i b, to liczba abc nie może być liczbą „bardzo złożoną".

***Delta**: W praktyce stosuje się pewnie bardziej ścisłe wysłowienie tego faktu...*

Jerzy Browkin: Oczywiście. Oto ono: Niech a oraz b będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, natomiast c ich sumą, tzn.

$$\mathrm{NWD}(a,b)=1 \quad \text{oraz} \quad a+b=c.$$

Niech ponadto

$$L(a,b)=\frac{\log c}{\log r(abc)},$$

gdzie $r(n)$ jest określone jak wyżej. Hipoteza *abc* stwierdza, że dla każdej liczby $q>1$ istnieje tylko skończenie wiele trójek a,b,c spełniających powyższe warunki i takich, że $L(a,b)>q$.

***Delta**: Czy hipoteza abc to tylko problem interesujący „sam w sobie", czy też jest ona powiązana z innymi twierdzeniami?*

Jerzy Browkin: Hipoteza *abc* ma wiele bardzo poważnych konsekwencji. Jest ona związana z teorią krzywych algebraicznych, a także z wieloma twierdzeniami teorii liczb, np. z Wielkim Twierdzeniem Fermata. Wynika z niej mianowicie, że istnieje tylko skończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n,x,y,z spełniających warunki: $n>3$ oraz $\mathrm{NWD}(x,y)=1$ i takich, że

$$x^n+y^n=z^n.$$

Wystarczy bowiem wziąć $a=x^n$, $b=y^n$ oraz $c=z^n$ i zauważyć, że

$$L(a,b)=\frac{n\log z}{\log r(xyz)}>\frac{n\log z}{\log(z^3)}=\frac{n}{3}\geq\frac{4}{3}.$$

Ponadto z hipotezy *abc* wynika – jak dowiódł J.H. Silverman – że dla każdego $a\geq 2$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p, że $a^{p-1}\not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

***Delta**: Wydaje się zatem, że hipoteza abc jest bardzo silna. Jej dowód może być więc ogromnie trudny. Co do tej pory udało się osiągnąć?*

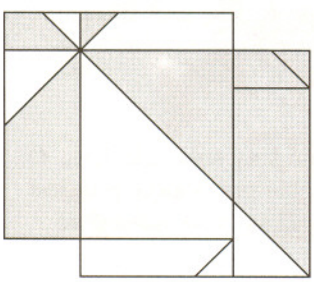
Jerzy Browkin: Wiemy na przykład, że w każdym otoczeniu dowolnego punktu z przedziału $[\frac{1}{3},\frac{36}{37}]$ znajduje się nieskończenie wiele wartości $L(a,b)$ dla różnych trójek a,b,c, spełniających podane wcześniej założenia. Oczywiście dążymy do tego, by wykazać, że przedział takich punktów jest równy $[\frac{1}{3},1]$, ale obecnie nie wiemy nawet, czy sama liczba 1 ma rozważaną tu własność.

***Delta**: Wartość $\frac{1}{3}$ jest dość oczywista w tym kontekście, gdy tylko spojrzy się na definicję $L(a,b)$. Wartość $\frac{36}{37}$ jest już bardziej zagadkowa...*

Jerzy Browkin: To po prostu kolejny etap „wyścigu". Pierwszy przedział, jaki uzyskano, był równy $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$. Potem wraz z M. Filasetą, G. Greavesem i A. Schinzlem poprawiliśmy go do $[\frac{1}{3},\frac{15}{16}]$. Przedział $[\frac{1}{3},\frac{36}{37}]$ to wynik G. Greavesa i A. Nitaja.

***Delta**: Z hipotezy abc wynika, że istnieje największa wartość $L(a,b)$ dla a,b określonych wyżej. Czy wartość ta jest znana?*

Rozwiązanie zadania M 920.
Rysunek pokazuje, jak z rozważanych części kwadratu złożyć na nowo kwadrat tak, by rozważana równość pól stała się oczywista.



Jerzy Browkin: Istnieje hipoteza, że jest ona mniejsza od 2. Nadal jest to jednak tylko hipoteza. Największa znana obecnie wartość $L(a,b)$ dla liczb a i b względnie pierwszych wynosi 1,629912... dla $a = 2$, $b = 3^9 \cdot 109$, $c = 23^5$. Znalazł ją Eric Reyssat.

Delta: *Czy do poszukiwania takich ekstremalnych wartości $L(a,b)$ wystarcza kartka papieru, czy też konieczne są „superkomputery"?*

Jerzy Browkin: Jeszcze niedawno wystarczał... kalkulator. Obecnie używa się już raczej „superkomputerów".

Delta: *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał W.S.

Hipoteza *abcd*

Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że

$$NWD(a,b,c,d) = 1, \quad |abcd| > 1, \quad a+b+c+d = 0$$

oraz każda podsuma sumy $a+b+c+d$ jest różna od zera.

Określamy

$$L(a,b,c,d) = \frac{\log(\max(|a|,|b|,|c|,|d|))}{\log(r(abcd))},$$

gdzie $r(n)$ jak zwykle oznacza iloczyn różnych dzielników pierwszych liczby n. Hipoteza *abcd* stwierdza, że dla każdego $q > 3$ istnieje tylko skończenie wiele takich układów (a,b,c,d), że $L(a,b,c,d) \geq q$.

Uwaga 1. Jeżeli $a + b = c$ spełnia założenia hipotezy *abc*, to podnosząc do sześcianu, otrzymamy przykład dla hipotezy *abcd*

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = 0.$$

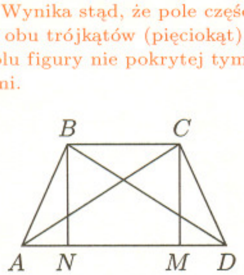
Łatwo zauważyć, że jeśli liczba abc jest podzielna przez 3, to $L(a^3, b^3, c^3, 3abc) = 3L(a,b,c)$, co wyjaśnia, dlaczego w hipotezie *abcd* mamy liczbę 3.

Uwaga 2. Hipotezy *abc* i *abcd* dotyczą liczb całkowitych. Można sformułować analogiczne hipotezy dla wielomianów (jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych), zastępując logarytm liczby naturalnej przez stopień wielomianu. Otóż hipotezy *abc* i *abcd* dla wielomianów zostały udowodnione – przestały więc być hipotezami, a stały się twierdzeniami.

Najlepszy znany przykład dla hipotezy *abcd* pochodzi od najlepszego przykładu znanego dla hipotezy *abc*, tzn. od przykładu Reyssata za pomocą podniesienia do sześcianu. W przypadku hipotezy *abcd* nie prowadzono poszukiwań dobrych przykładów za pomocą komputerów ani bez ich pomocy. Jest to zatem pole do popisu dla Czytelników *Delty*. Inny ciekawy problem, związany z hipotezą *abcd*, to pytanie, jak ją sformułować, przy założeniu, że liczby a, b, c, d są **parami** względnie pierwsze. Zapewne liczba 3 nie jest w tej sytuacji odpowiednia. To również może być przedmiotem interesujących eksperymentów Czytelników.

Jerzy BROWKIN

Rozwiązanie zadania M 921.
Przy oznaczeniach z rysunku rozważmy trójkąt ACM. Jego wysokość jest równa wysokości trapezu, podstawa AM – długości środkowej trapezu, a więc pole tego trójkąta, jak również pole trójkąta BDN, jest równe połowie pola trapezu. Wynika stąd, że pole części wspólnej obu trójkątów (pięciokąt) jest równe polu figury nie pokrytej tymi trójkątami.



Rozwiązanie problemu Speedlimit z *Małej Delty*

Przypuśćmy, że wujek Zenon zbliża się do miasteczka Speedlimit z prędkością x mil na godzinę, gdy jest oddalony od Speedlimit o x mil. Kiedy znajdzie się w odległości 1 mili od miasteczka, jechać więc będzie z szybkością 1 mili na godzinę. Najbliższe pół mili pokona więc z szybkością nie większą niż 1 mila/godz., co zajmie mu nie mniej niż 0,5 mili/(1 mila/godz.) = 0,5 godziny. Połowę pozostałej drogi (czyli 0,25 mili) pokona z prędkością nie większą niż 0,5 mili na godzinę (dlaczego?), a zatem zajmie mu to nie mniej niż 0,25/0,5 = 0,5 godziny. Pokonanie połowy pozostałej części drogi znów zajmie mu nie mniej niż pół godziny itd., itd. Stąd, żeby dotrzeć do celu, potrzebować będzie nie mniej godzin niż: $1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots = \infty$. A zatem do miasteczka Speedlimit nie można w ten sposób dojechać w skończonym czasie.