GRY (13)

Zasiadamy teraz do gry RÓŻNE STOSY z przeciwnikiem, który jest dziwnie przesądny i stawia warunek: **Nigdy, przenigdy, podczas gry nie może się pojawić stos mający dokładnie 6 bierek.** Nie mamy wyjścia, przeciwnik jest uparty, więc przystajemy na ten warunek.

Co zmienia przyjęcie takiego ograniczenia? Dopóki w grze są tylko stosy mające mniej niż 6 bierek, wszystko jest po staremu.

Dla stosu złożonego z 7 bierek mieliśmy dotychczas trzy możliwe posunięcia prowadzące do pozycji o liczbie Grundy'ego odpowiednio 1, 2 i 1, skąd wyliczyliśmy, że liczba Grundy'go $r(7)$ stosu 7-elementowego jest równa 0 (jako najmniejsza liczba całkowita nieujemna niewystępująca wśród liczb 1, 2 i 1).

7 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1 , 6	$0 +_2 1 = 1$
2 , 5	$0 +_2 2 = 2$
3 , 4	$1 +_2 0 = 1$

7 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
2 , 5	$0 +_2 2 = 2$
3 , 4	$1 +_2 0 = 1$

Jeżeli zabronimy tworzenia stosów 6-bierkowych, odpadnie nam możliwość dokonania podziału stosu 7-elementowego na stosy o licznościach 1 i 6, co nie zmienia faktu, że liczba Grundy'ego $r_6(7)$ pozycji złożonej z jednego stosu 7-bierkowego w grze RÓŻNE STOSY wynosi 0 pomimo wprowadzenia zakazu tworzenia stosów złożonych z 6 bierek.

Dla stosu złożonego z 8 bierek zabroniony jest podział na stosy 2 i 6, co już ma wpływ na liczbę Gundy'ego, gdyż $r(8) = 2$, podczas gdy $r_6(8) = 1$.

8 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1 , 7	$0 +_2 0 = 0$
2 , 6	$0 +_2 1 = 1$
3 , 5	$1 +_2 2 = 3$

8 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1 , 7	$0 +_2 0 = 0$
3 , 5	$1 +_2 2 = 3$

Przy 9 bierkach modyfikacja gry daje znać o sobie jeszcze bardziej, gdyż oprócz zakazu podziału na stosy 3 i 6, do głosu dochodzi zmiana liczby Grundy'ego stosu 8-elementowego.

9 bierek	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1 , 8	$0 +_2 2 = 2$
2 , 7	$0 +_2 0 = 0$
3 , 6	$1 +_2 1 = 0$
4 , 5	$0 +_2 2 = 2$

9 bierek (6 zabronione)	
Pozycja	Liczba Grundy'ego
1 , 8	$0 +_2 2 = 2$
2 , 7	$0 +_2 0 = 0$
4 , 5	$0 +_2 2 = 2$

Zastanów się, Drogi Czytelniku, jak zmieni się po wyżej wprowadzonym ograniczeniu przebieg gry rozpoczynającej się od stosu złożonego z 37 bierek, którą opisaliśmy w poprzednim Γ-limatiasie. Odpowiedź za dwa miesiące.

JWR

Najgorsze przybliżenia liczby π (1)

Jest dużo wzorów dających bardzo dobre przybliżenia liczby π. W poszukiwaniu przybliżeń *najgorszych* jest oczywiście sporo przekory. Nie chodzi jednak o podanie przybliżeń *z sufitu*. Przedstawiamy wzory, które w granicy dają dokładną wartość π, jednak zbieżność jest, mówiąc delikatnie, nie najszybsza. Wzory te pojawiają się w sposób naturalny, jednak nakład pracy włożonej w obliczenie przybliżonej wartości π przy ich użyciu procentuje nie najlepiej.

Arcus sinus

Korzystamy z rozwinięcia funkcji arcsin w szereg potęgowy. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1)} + \ldots ,$$

skąd po podstawieniu $x = 1$ otrzymujemy

$$\pi = 2 \arcsin 1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+1)} + \ldots \right).$$

Uwzględnimy 50 wyrazów powyższego szeregu, aby otrzymać iście imponująco wyglądające przybliżenie

$$\pi \approx \frac{64341351001831558926908434473869802762184342487946190274503565130433}{21577411012715429447243757700009128948046771365134424924090059980800},$$

w którym licznik i mianownik mają po 68 cyfr.

Nie pytaj, Drogi Czytelniku, ile cyfr po przecinku daje to przybliżenie, zobacz lepiej, co jest przed przecinkiem. Powyższy ułamek daje bowiem $\pi \approx 2{,}98188$.

Przy 1000 wyrazów otrzymujemy przybliżenie π ułamkiem o 1463-cyfrowym liczniku i 1462-cyfrowym mianowniku.

Nie będziemy przytaczać tego ułamka ograniczając się do przybliżenia, jakie on daje: $\pi \approx 3{,}1059$.

10 000 wyrazów daje $\pi \approx 3{,}1303$, a przy 100 000 wyrazów otrzymujemy $\pi \approx 3{,}138$, widać więc, że sumy częściowe szeregu zaczynają się upodabniać do rzeczywistej wartości π bardzo powoli.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl