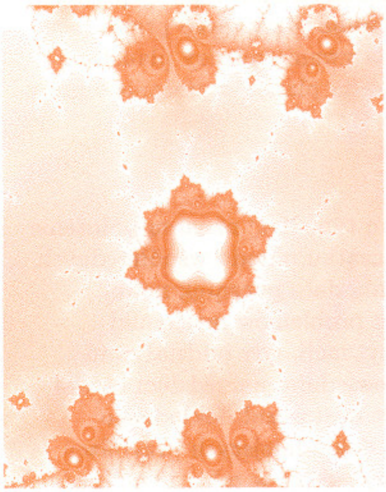
Bęben

Anna ZATORSKA



Słysząc dźwięk, potrafimy bardzo często określić, jakie jest jego źródło. Z łatwością rozpoznajemy brzmienie perkusji, pianina czy kontrabasu. Gdy dzwonią do nas przyjaciele, rozpoznajemy ich po głosie. Czy jednak w dźwiękach zawarta jest „cała” informacja o ich źródłach? Jakie własności źródeł dadzą się usłyszeć?

Zanim zajmiemy się tymi pytaniami, poznajmy nieco bliżej świat dźwięków. Większość z nich składa się z szeregu drgań o różnych częstotliwościach. Częstotliwości te tworzą tzw. spektrum dźwięku. Drgania składowe nazywamy tonami czystymi lub alikwotami. Jeżeli wśród tych czystych tonów jeden wyróżnia się natężeniem, to możemy określić tzw. wysokość dźwięku, tzn. nasze ucho (a w zasadzie mózg) jest w stanie wyodrębnić częstotliwość tego wyróżniającego się drgania (częstotliwość podstawową). Natomiast skład pozostałych alikwotów i ich natężenia decydują o tym, jaką dźwięk ma barwę. Czystych tonów jest nieskończenie wiele, ale tylko część mieści się w naszym zakresie słyszalności.

To, jakie alikwoty są generowane, zależy od rodzaju ciała drgającego oraz od otoczenia, np. pudło rezonansowe może wzmacniać jedne, a wygaszać inne alikwoty. Stąd ten sam dźwięk (tzn. o ustalonej częstotliwości podstawowej) brzmi inaczej, gdy wydawany jest przez flet prosty i inaczej, gdy przez fortepian.

Niektóre ciała, np. bębny, powodują takie drgania, w których nie można wyróżnić tej jednej podstawowej częstotliwości, nie można więc określić wysokości wydawanego przez nie dźwięku. Inne, np. dzwony, wydają taki dźwięk, w którym częstotliwość podstawowa słabo się wyróżnia spośród innych.

Na początku naszego wieku H.A. Lorentz postawił następującą hipotezę: jeżeli znamy wszystkie generowane alikwoty, to możemy określić, jaką wielkość ma ciało, które drga. W rzeczywistości Lorentz nie interesował się falami akustycznymi, lecz falami elektromagnetycznymi powstającymi w ciele doskonale czarnym, ale ponieważ równanie falowe nadaje się do opisu wszelkich fal, więc możemy trzymać się terminologii dźwiękowej.

Hipoteza Lorentza została niedługo potem udowodniona przez Hermanna Weyla. Weyl wykazał bowiem, że zachodzi równość

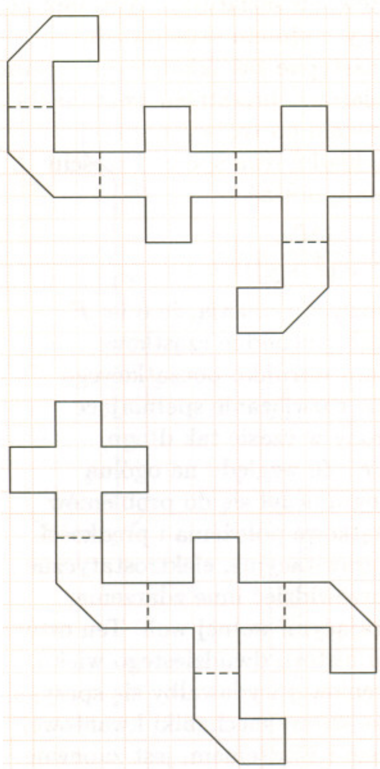
$$|\Omega| = \lim_{t\to 0} 2\pi t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t},$$

gdzie λ_n to kwadraty częstotliwości odpowiadających czystym tonom, a $|\Omega|$ oznacza powierzchnię pewnego drgającego obszaru Ω na płaszczyźnie np. membrany głośnika lub bębna.

W latach 50. A. Pleijel udowodnił, że znając wszystkie alikwoty, możemy także określić obwód bębna (L)

$$L = \lim_{t\to 0} 4\sqrt{2\pi t}\left(\sum_n e^{-\lambda_n t} - \frac{|\Omega|}{2\pi t}\right).$$

Zachęcony tymi sukcesami Mark Kac napisał słynną pracę „Czy można usłyszeć kształt bębna?” (np. *Wiadomości Matematyczne* 13(1971), 11–35), która nie tylko rozpowszechniła bębnową terminologię pochodzącą od Bersa, ale także dała początek licznym badaniom. Ostateczna odpowiedź na tytułowe pytanie artykułu Kaca okazała się negatywna. Na początku lat 90. podano przykład dwóch całkowicie różnych (nieizometrycznych) obszarów, które mają dokładnie to samo spektrum, czyli te same alikwoty.



Nieizometryczne obszary, dające te same alikwoty. Kratka służy łatwiejszemu porównaniu tych obszarów, podobnie jak przerywane linie.

Mimo negatywnego rozwiązania hipotezy Kaca pytania o to, co można jeszcze „usłyszeć” w bębnie, są nadal aktualne, np. jeżeli w membranie są jakieś dziury, to czy można określić, ile ich jest?

Na zakończenie warto dodać, że o bębnie mówiliśmy dla uproszczenia. Tak naprawdę problemy te dotyczą wszelkich drgań i różnych obszarów, gdzie te drgania zachodzą.