Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2000

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 286 (WT=2,17) i 287 (WT=1,83) z numeru 11/1999

Tomasz Wietecha	– Tarnów	41,11
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	31,95
Aleksander Surma	– Myszków	29,98
Artur Arciszewski	– Kielce	26,43
Jarosław Łazuka	– Warszawa	26,30
Marek Wójcicki	– Szczecin	24,61
Tomasz Rudny	– Warszawa	20,37
Grzegorz Miłoś	– Mielec	19,49

Skorygowana została pomyłka w ocenie zadania **281** u p. Wójcickiego.

Zadania z fizyki nr 298, 299

Redaguje Jerzy B. BROJAN

298. Na poziomym stole leży jednorodny pręt o ciężarze P, przy czym siła jego nacisku na stół jest równo rozłożona (dla każdego jednostkowego odcinka pręta jest jednakowa). Jeśli współczynnik tarcia pręta o stół wynosi f, to jaką siłą trzeba działać na koniec pręta w kierunku poziomym i prostopadłym do pręta, aby ruszyć go z miejsca?

299. Walcowa płytka szklana może mieć właściwości soczewki, jeśli współczynnik załamania szkła jest różny w różnych punktach płytki. Przyjmijmy, że współczynnik ten zależy od odległości od osi optycznej r według wzoru $n(r) = n_0 + \alpha r^\beta$ (a nie zmienia się przy przesunięciach wzdłuż osi). Jakie warunki muszą spełniać parametry w podanym wzorze, aby płytka o grubości d była soczewką o ogniskowej f? Zakładamy, że ogniskowa jest znacznie dłuższa zarówno od grubości, jak i od średnicy płytki.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2000

Przypominamy treść zadań:

290. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B znajduje się nieruchomy ładunek punktowy Q. Małe ciało o masie m i ładunku q umieszczono w punkcie odległym od Q o r_0, przy czym odcinek $q-Q$ jest prostopadły do $\vec{B}$, a prędkość początkowa ciała jest równa zeru; ponadto przyjmijmy, że znaki ładunków są jednakowe. Wykazać, że w czasie ruchu ciała jego odległość od Q nie przekroczy pewnej maksymalnej wielkości $r_{\max}$ i podać równanie pozwalające obliczyć tę wielkość.

291. Dwie równoległe czarne powierzchnie płaskie znajdują się w temperaturach 0°C i 100°C, a w obszarze między nimi jest próżnia. Jeśli wprowadzimy w ten obszar cienką czarną płytę równoległą do obu powierzchni, to jaką temperaturę przybierze ona po długim czasie? Rozmiary powierzchni są znacznie większe od odległości między nimi.

290. Ponieważ siła pochodząca od pola magnetycznego jest skierowana prostopadle do prędkości ciała, więc jej praca jest równa zeru i zasada zachowania energii obowiązuje w postaci takiej, jak pod nieobecność pola magnetycznego:

$$\frac{1}{2}mv^2 + k_0\frac{qQ}{r} = k_0\frac{qQ}{r_0}.$$

Drugą zasadę zachowania można wyprowadzić mnożąc obie strony równania ruchu

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = k_0\frac{qQ}{r^3}\vec{r} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

wektorowo przez $\vec{r}$. Uwzględniając fakt, iż w naszym zadaniu ruch ciała jest ograniczony do płaszczyzny prostopadłej do $\vec{B}$, dochodzimy po przekształceniach do wniosku, że wielkością zachowaną jest „zmodyfikowany moment pędu", dany wyrażeniem

$$L_z = (\vec{r}\times\vec{p})_z + \frac{1}{2}qBr^2,$$

gdzie oś z pokrywa się z kierunkiem $\vec{B}$. We współrzędnych biegunowych mamy

$$L_z = mr^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}qBr^2 = \frac{1}{2}qBr_0^2.$$

Stąd wyznaczamy $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ i podstawiamy do wyrażenia $v^2 = (\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2 + (r\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)^2$ w zasadzie zachowania energii. Otrzymujemy równanie

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{q^2B^2(r^2-r_0^2)^2}{8mr^2} = k_0qQ\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right).$$

Widać, że r nie może osiągać ani bardzo dużych wartości, ani bardzo małych. Maksymalną wartość r określa warunek $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$, a wynikające stąd równanie na $r_{\max}$ jest równaniem algebraicznym III stopnia.

291. Po długim czasie układ osiągnie stan stacjonarny, w którym strumień energii promieniowania przepływającego z gorącej powierzchni do płyty zrówna się ze strumieniem przepływającym z płyty do powierzchni zimnej. Zgodnie ze wzorem Stefana–Boltzmanna mamy

$$\sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_3^4).$$

Stąd wyznaczamy temperaturę płyty T_2

$$T_2 = \left(\frac{1}{2}(T_1^4 + T_3^4)\right)^{1/4} = 334\ \mathrm{K} = 61^\circ\mathrm{C}.$$

Zauważmy, że odległości płyty od poszczególnych powierzchni nie mają znaczenia: taka sama wartość T_2 wystąpi, gdy płyta będzie w jednakowej odległości od powierzchni, jak wtedy, gdy będzie tuż przy jednej z nich.

(Inspiracją w tej serii były niektóre zadania Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej w Norwegii w 1996 r.)

Zadania z matematyki nr 401, 402

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2000

401. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych $a > 1$, $n > 1$ o tej własności, że każdy dzielnik pierwszy liczby $a^n - 1$ jest dzielnikiem liczby $a - 1$.

402. Dwusieczna kąta DAB równoległoboku $ABCD$ przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie CKL leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD.

Zadanie **402** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2000

Przypominamy treść zadań:

393. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ losujemy bez zwracania m liczb $(1 \le m \le 2000)$. Niech p_m będzie prawdopodobieństwem tego, że suma wylosowanych liczb dzieli się przez 5. Wyznaczyć te wartości m, dla których $p_m = 1/5$.

394. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (a, b) o tej własności, że wielomian $P(x) = x^5 - ax + b$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest równy 1.

393. Losowanie m liczb bez zwracania można interpretować jako wybór m-elementowego podzbioru M zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$. Przedstawiamy ten zbiór jako sumę czterystu zbiorów pięcioelementowych $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{400}$:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}, \quad \ldots, \quad A_{400} = \{1996, \ldots, 2000\}.$$

Będziemy mówili, że zbiór $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ jest *zgrabny*, gdy jest sumą pewnej liczby zbiorów A_j; zbiór, który nie jest zgrabny, będziemy nazywać *niezgrabnym*.

Weźmy pod uwagę dowolny m-elementowy zbiór niezgrabny $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$. Niech j będzie najmniejszym numerem takim, że M zawiera pewne – ale nie wszystkie – elementy z piątki $A_j = \{5j{-}4,\ 5j{-}3,\ 5j{-}2,\ 5j{-}1,\ 5j\}$; przyjmijmy, że część wspólna $M \cap A_j$ składa się z k liczb (zatem $0 < k < 5$).

Niech $\psi\colon\ A_j \to A_j$ będzie przesunięciem cyklicznym:

$$\psi(i) = \begin{cases} i+1 & \text{gdy } 5j{-}4 \le i \le 5j{-}1, \\ 5j{-}4 & \text{gdy } \quad i = 5j; \end{cases}$$

oznaczmy $\psi^2 = \psi \circ \psi$, itd. Tworzymy nowy zbiór M^*, także mający k-elementowe przecięcie z piątką A_j:

$$M^* = \begin{cases} \psi(M \cap A_j) \,\cup\, (M \setminus A_j) & \text{jeśli } k = 1, \\ \psi^3(M \cap A_j) \,\cup\, (M \setminus A_j) & \text{jeśli } k = 2, \\ \psi^2(M \cap A_j) \,\cup\, (M \setminus A_j) & \text{jeśli } k = 3, \\ \psi^4(M \cap A_j) \,\cup\, (M \setminus A_j) & \text{jeśli } k = 4 \end{cases}$$

(część zbioru M, położona poza piątką A_j, wchodzi do zbioru M^* bez żadnej zmiany). Oznaczając przez $s(M)$ sumę liczb w zbiorze M, dostajemy w każdym przypadku równość $s(M^*) \equiv s(M) + 1 \pmod 5$.

Różnym zbiorom M są przyporządkowane różne zbiory M^*. Oznaczmy przez $\mathcal{M}_r$ rodzinę tych zbiorów niezgrabnych, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 5 resztę r. Tak więc operacja $M \mapsto M^*$ odwzorowuje rodzinę $\mathcal{M}_0$ na $\mathcal{M}_1$, rodzinę $\mathcal{M}_1$ na $\mathcal{M}_2$, itd., rodzinę $\mathcal{M}_4$ na $\mathcal{M}_0$. Stąd wynika, że każda z tych pięciu rodzin liczy tyle samo zbiorów. Wobec tego – w obrębie klasy zbiorów niezgrabnych – wszystkie reszty z dzielenia sumy elementów wybranego zbioru przez 5 są jednakowo prawdopodobne.

Jeżeli liczba m nie dzieli się przez 5, to zbiory zgrabne nie istnieją; prawdopodobieństwo uzyskania każdej reszty jest równe $1/5$. Jeżeli zaś m dzieli się przez 5, to zbiory zgrabne istnieją, a suma elementów każdego z nich jest podzielna przez 5. Zatem w tym przypadku uzyskanie reszty 0 jest bardziej prawdopodobne niż uzyskanie dowolnej innej reszty.

Wniosek: równość $p_m = 1/5$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą niepodzielną przez 5.

394. Rozważmy trójmian kwadratowy $x^2 - mx + 1$ (zmiennej x) z parametrem całkowitym $m > 2$. Ma on dwa pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest równy 1.

Jeżeli liczba x jest pierwiastkiem tego trójmianu, to spełnia ona też następujące równości:

$$\begin{aligned} x^2 &= mx - 1, \\ x^4 &= m^2x^2 - 2mx + 1 = m^2(mx - 1) - 2mx + 1 = \\ &= (m^3 - 2m)x + (1 - m^2), \\ x^5 &= (m^3 - 2m)x^2 + (1 - m^2)x = (m^3 - 2m)(mx - 1) + (1 - m^2)x = \\ &= (m^4 - 3m^2 + 1)x + (2m - m^3), \end{aligned}$$

czyli jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^5 - ax + b$, gdzie $a = m^4 - 3m^2 + 1$ oraz $b = m^3 - 2m$. Przyjmując jako m kolejne liczby całkowite większe od 2, otrzymujemy różne pary liczb całkowitych (a, b); a wśród pierwiastków wyznaczonego przez nie wielomianu $P(x)$ znajdują się pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - mx + 1$, o iloczynie równym 1.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 385 (WT=2,13) i 386 (WT=1,40) z numeru 9/1999

Krzysztof Zapisek	– Warszawa	42,22
Janusz Olszewski	– Suwałki	41,44
Andrzej Daniluk	– Kraków	40,60
Rafał Pikuła	– Wrocław	38,09
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,62