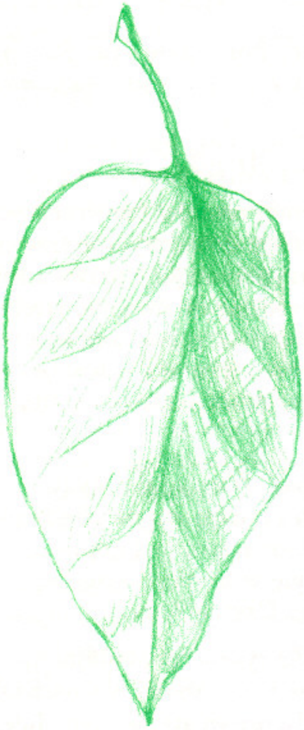
Sinusy, iloczyny i sumy

Grzegorz RZĄDKOWSKI



Tożsamość

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\tag{1}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, pojawia się w wielu podręcznikach i zbiorach zadań. Można ją znaleźć, na przykład, w znakomitym *Zbiorze zadań z algebry* (PWN, Warszawa 1972) (zadanie 2.34.3) Leona Jeśmanowicza i Jerzego Łosia. Chociaż tożsamość (1) ma charakter czysto rzeczywisty, to wszystkie znane jej dowody opierają się na liczbach zespolonych. Paul J. Nahin w swojej książce *An imaginary tale; the story of* $\sqrt{-1}$ (Princeton University Press, 1998) pisze „...can you even begin to imagine how to derive them without $\sqrt{-1}$? I can't" (str. 72), mając na myśli tożsamość (1) oraz jej odpowiednik, w którym funkcja sinus została zastąpiona przez kosinus.

Spróbujmy zatem znaleźć dowód, w którym nie będą występować liczby zespolone. Weźmy pod uwagę znany wzór ($k\in N,\ x\in R$)

$$\begin{aligned}\sin kx=\binom{k}{1}\cos^{k-1}x\sin x-\binom{k}{3}\cos^{k-3}x\sin^3x+&\\ +\binom{k}{5}\cos^{k-5}x\sin^5x-\ldots,&\end{aligned}\tag{2}$$

w którym suma po prawej stronie jest, oczywiście, skończona. Ostatnim jej wyrazem, z odpowiednim współczynnikiem, jest $\sin^k x$ dla k nieparzystego lub $\cos x\sin^{k-1}x$ dla k parzystego. Wzoru (2), razem z podobnym wzorem dla $\cos kx$, można bez trudu dowieść za pomocą indukcji matematycznej. Załóżmy, że liczba k jest parzysta, $k=2n$, i przepiszmy jeszcze raz wzór (2), wyciągając przed nawias czynnik $\sin x\cos x$ występujący w każdym składniku po prawej stronie

$$\begin{aligned}\sin 2nx=\cos x\sin x\Bigg[\binom{2n}{1}\cos^{2n-2}x-\binom{2n}{3}\cos^{2n-4}x\ \sin^2x+&\\ +\binom{2n}{5}\cos^{2n-6}x\ \sin^4x-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-1}\sin^{2n-2}x\Bigg].&\end{aligned}\tag{3}$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenie stojące w nawiasie kwadratowym w powyższym wzorze i podstawmy w tym wyrażeniu $t=\sin x$. Otrzymamy następujący wielomian stopnia $(2n-2)$

$$\binom{2n}{1}(1-t^2)^{n-1}-\binom{2n}{3}(1-t^2)^{n-2}t^2+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-1}t^{2n-2}.\tag{4}$$

Zauważmy, że, patrząc na wzór (3), można łatwo wypisać wszystkie $(2n-2)$ pierwiastki tego wielomianu. Czytelnik sprawdzi, że są to liczby

$$\pm\sin\frac{\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{2\pi}{2n},\ \pm\sin\frac{3\pi}{2n},\ldots,\ \pm\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Współczynnik przy najwyższej potędze t^{2n-2} wielomianu (4) wynosi

$$(-1)^{n-1}\left(\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}\right)=(-1)^{n-1}2^{2n-1},$$

a wyraz wolny jest równy $\binom{2n}{1}=2n.$

W takim razie jeden ze wzorów Viéte'a, na iloczyn pierwiastków, daje

$$\sin^2\frac{\pi}{2n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{2n}{2^{2n-1}},\tag{5}$$

i tożsamość (1) wynika z pierwiastkowania obu stron powyższej równości.

Apologia

W zupełnie nieoczekiwany sposób dołączyłem do znanego z Γ-limatiasu oszusta. Otóż w moim artykule z numeru 2/2000 przekonywałem, że za pomocą indeksu można rozróżniać ujście wody od jej źródła. Tymczasem indeks krzywej reaguje zarówno na ujście, jak i źródło w ten sam sposób: wektory prędkości obracają się w tę samą stronę. Okazuje się zatem, że aby widzieć to, czego nie widać, trzeba najpierw widzieć to, co widać, a w szczególności odróżniać stronę lewą od prawej...

W.S.

Zwróćmy uwagę, że powyższy sposób pozwala na otrzymanie innych ciekawych tożsamości. Obliczmy, na przykład, współczynnik wielomianu (4) stojący przy t^2. Wynosi on, jak łatwo zauważyć,

$$-\binom{2n}{1}(n-1)-\binom{2n}{3}=-\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)$$

i stąd mamy następny, związany z tym współczynnikiem, wzór Viéte'a

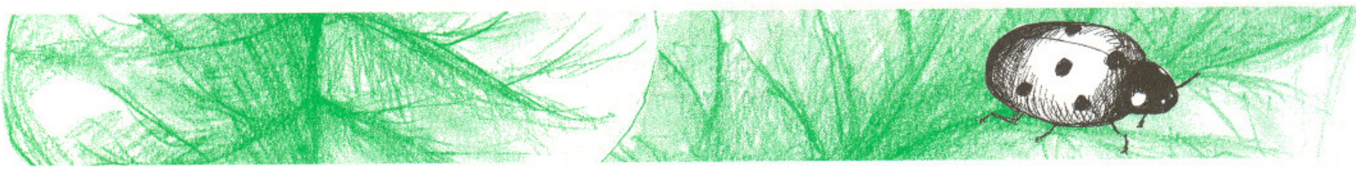
$$(6)\quad \sum_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{\pi}{2n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\widehat{\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\cdot\ldots\cdot\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)}{2^{2n-1}},$$

gdzie $\widehat{\quad}$ („daszek") oznacza, że dany czynnik nie występuje w iloczynie.

Dzieląc stronami (6) przez (5), otrzymujemy także

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}}=\frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)}{2n}=\frac{2}{3}(n-1)(n+1).$$

Zachęcamy Czytelnika, żeby – po pierwsze – spróbował wypisać pozostałe wzory Viéte'a, a – po drugie – zastanowił się głębiej nad opisaną metodą. Może powstanie z tego ciekawa praca, która weźmie udział w Konkursie Prac Uczniowskich *Delty*?



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 913. W turnieju bierze udział $(m-1)n+1$ zawodników ($m \geq 2$). Udowodnić, że co najmniej jedno z poniższych zdań jest prawdziwe:
a) Można wybrać m zawodników, spośród których żadni dwaj się nie znają.
b) Pewien zawodnik zna co najmniej n zawodników.
Rozwiązanie na str. 16

M 914. Na kongresie kombatantów okazało się, że każdy kombatant ma wśród zgromadzonych co najmniej jednego znajomego, ale żadni dwaj kombatanci, którzy mają równą liczbę znajomych wśród uczestników kongresu, wspólnego znajomego nie mają. Udowodnić, że na kongresie jest kombatant, który ma dokładnie jednego znajomego.
Rozwiązanie na str. 16

M 915. Każdy spośród 90 uczestników kursu posługiwania się maską przeciwgazową ma co najmniej 10 kolegów. Udowodnić, że każdy uczestnik kursu może zaprosić na bal maskowy trzech uczestników kursu tak, by wśród czterech zebranych każdy miał nie mniej niż dwóch kolegów.
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 521. Punktowe źródło światła umieszczone w odległości r od płaskiego ekranu daje na środku ekranu oświetlenie E. Jak zmieni się oświetlenie w tym punkcie, jeżeli po drugiej stronie źródła światła w odległości $r/2$ umieścić zwierciadło wklęsłe o promieniu r?
Rozwiązanie na str. 7

F 522. Wysoko nad płaszczyzną stołu znajduje się punktowe źródło światła o natężeniu 100 kandeli. Jakie będzie oświetlenie w punkcie znajdującym się pod źródłem, jeżeli na drodze promieni umieścimy poziomo soczewkę o zdolności skupiającej równej 1 dioptrii. Źródło znajduje się w ognisku soczewki.
Rozwiązanie na str. 4