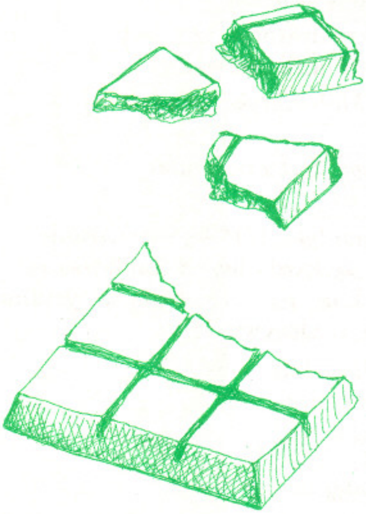
mała delta

Podział czekolady



Mama przyniosła do domu czekoladę i dała chłopcom do podziału. Pawełek porwał czekoladę ze stołu i oświadczył głośno:
– Podzielę ją sprawiedliwie.
Tomek spojrzał podejrzliwie na Pawełka; co znaczy sprawiedliwość młodszego brata? A Pawełek kontynuował:
– Masz, Tomku, pół czekolady – i wręczył mu połówkę – ale zrób tak, jak ja, podziel to, co ci daję, na pół i jeden kawałek daj mi.
Tomek widział niesprawiedliwość, ale zrobił tak, jak Pawełek prosił, tylko dodał:
– Ale ty oddaj mi pół tego, co ci teraz daję.
Pawełek dał mu kawałek, a Tomek oddał mu pół tego, co dostał. Tak się dzielili coraz mniejszym kawałkiem, aż nierozdzielone zostały tylko brązowe plamy na palcach.
– Czy dostaliście po równo? – zapytała mama, słysząc wrzawę przy stole kuchennym:
– Jak zwykle, Paweł dostał więcej! – poskarżył się Tomek.
Paweł nie zaprzeczył, ale ze śmiechem krzyknął:
– Dostałem więcej, ale dzieliłem sprawiedliwie, zawsze w ten sam sposób.
– Sposób był ten sam, ale ty, Pawełku, zacząłeś dzielić.
Pawełek przerwał
– Kto pierwszy ten lepszy! A może wcale nie mam więcej?
Tu schował połówkę czekolady, którą miał od początku i dorzucił ze śmiechem:
– A teraz mam mniej.
Mama spojrzała na niego surowo, na co Pawełek zgromadził całą swoją czekoladę i pół dał mamie.
– Czy teraz jest sprawiedliwie? – zapytał.
A co Ty sądzisz, Czytelniku?

Odpowiedź.
Czy sprawiedliwie, trudno powiedzieć, ale każdy ma trzecią część czekolady. Jak dzieci zauważyły, sposób podziału był ciągle ten sam, tylko że Paweł zaczął dzielenie. Tak więc na początku Paweł podzielił czekoladę na pół i połówkę dał Tomkowi, a pół zostawił sobie i prosił Tomka o kontynuowanie zabawy. Tomek zrobił to samo co Pawełek, tyle że zaczął od połówki czekolady. A zatem Tomek skończy też z połową tego, co ma Pawełek. Tomek ma po podziale $\frac{1}{3}$ czekolady, a Pawełek $\frac{2}{3}$. Gdy Pawełek da mamie pół swojej części, każdy mieć będzie po równo $\left(\frac{1}{3}\text{ czekolady}\right)$.

Uwaga 1. Jeśli przeczytałeś, Czytelniku, artykulik o podziale świątecznej pomarańczy (*Delta* 9/1999), wiesz, że $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{1}{3}$. A $\frac{1}{3}$ jest częścią

czekolady, którą dostał w końcu Tomek. Jak rozumieć sumę po lewej stronie równości?

(**Odp.** Kolejne składniki sumy to połówki kawałków, które kolejno dostawał Tomek od Pawełka). Jeśli prześledzimy kolejne kroki zabawy, otrzymamy tożsamości: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{1}{3}$ – gdy patrzymy oczyma Tomka i $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{2}{3}$ – gdy patrzymy oczyma Pawełka.

Zadanie. Jak skończy się zabawa z czekoladą, gdy każdy chłopiec będzie oddawał trzecią część właśnie otrzymanego kawałka?

Uwaga 2. (Trochę wyższej matematyki – inspiracja do zagadki). Zeszłej jesieni uczyłem analizy studentów Uniwersytetu George'a Washingtona i dałem im zadanie z książki Kazimierza Kuratowskiego *Wstęp do Analizy*

> Niech $a_0=0, a_1=1, a_2=\frac{1}{2}$ i ogólnie $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$.
> Znaleźć granicę ciągu $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Nawet najlepsi studenci mieli kłopoty z tym problemem. Myślałem więc, jak zilustrować tę granicę bez liczenia. Jest miłym ćwiczeniem pokazanie, że zadanie z podziałem czekolady jest równoważne problemowi Kuratowskiego.

Wskazówka. $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n-a_{n+1}}{2}$, tak więc a_n jest ilością czekolady w rękach Pawełka po n-tym podziale (pierwszy podział to moment, gdy Pawełek wziął całą czekoladę).

Pytanie i odpowiedzi, z pomocą Tomka i Pawełka,
opracował Józef PRZYTYCKI

Twierdzenie mówiące, że trójkąt równoramienny ma równe kąty przy podstawie, zostało nazwane *pons asinorum*, czyli (po łacinie) ośli most. Nazwa ta miała informować, iż tylko skończony osioł nie jest w stanie pokonać tego etapu matematycznej edukacji. Wynikałoby z tego, że ten, kto to twierdzenie pojmie, osłem skończonym z całą pewnością nie jest. Narzuca to jednak potrzebę wprowadzenia pojęcia osła nieskończonego.

Jest pięć wielościanów foremnych (platońskich), czyli takich, które mają jednakowe foremne ściany zbiegające się w każdym wierzchołku w tej samej liczbie. W Starożytności wiązano je z żywiołami, a mianowicie czworościan to był ogień, sześcian – ziemia, ośmiościan – powietrze, dwudziestościan – woda, ostatni zaś odkryty dwunastościan wiązano z duchem bądź – gdy kto był materialistą – z harmonią Wszechświata.

Panowała kiedyś zasada, że nowo odkrywane planetoidy nazywano imionami żeńskimi. Nie dało się tego jednak utrzymać z powodu wielkiej liczby ciągle odkrywanych planetoid. Jednak do dziś nazwy żeńskie nadaje się obiektom na powierzchni Wenus. Jedynym wyjątkiem są Góry Maxwella.

Najbliżej Ziemi, w okresie pisanej historii ludzkości, wybuchła prawdopodobnie supernowa, po której pozostałością jest radiomgławica znana jako Cassiopeia A. Znajduje się w odległości 2760 pc i ma średnicę 6,′5, a wybuch nastąpił około roku 1670. Ocena chwili wybuchu jest niepewna, gdyż widział go prawdopodobnie tylko angielski astronom John Flamsteed. Doniósł on o zaobserwowaniu słabej gwiazdy 6 mag w miejscu zgodnym z obecnie wyznaczonym centrum eksplozji. Ten niezwykły fakt, że najbliższa supernowa była po prostu niezauważona przez ogół astronomów, przypisuje się wytworzeniu w trakcie wybuchu ogromnych ilości pyłu przesłaniającego całe zjawisko. Sprawa ta jest jednak daleka od pełnego wyjaśnienia.