Liczby Euklidesa

Witold BEDNAREK

Już Euklides wykazał, że liczb pierwszych (czyli takich liczb naturalnych $p > 1$, które dzielą się tylko przez 1 i przez p) jest nieskończenie wiele. Jego dowód opierał się na następującym spostrzeżeniu:

> Jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są początkowymi liczbami pierwszymi, to każdy dzielnik pierwszy liczby
> $$e_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$
> jest liczbą pierwszą różną od $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (dlaczego?).

Nazwijmy liczby e_n liczbami Euklidesa. Dla $n = 1$, 2, 3, 4 i 5 liczby Euklidesa są liczbami pierwszymi (odpowiednio: 3, 7, 31, 211, 2311). Dla $n = 6$, 7, 8, 9, 10 są to liczby złożone (np. $e_6 = 59 \cdot 509$, $e_9 = 317 \cdot 703763$). Liczba e_{11} to znów liczba pierwsza. Widzimy zatem, że wśród liczb Euklidesa znajdują się zarówno liczby pierwsze, jak i złożone. W związku z tym nasuwają się następujące pytania:

> Czy wśród liczb Euklidesa znajduje się
> (a) nieskończenie wiele liczb pierwszych?
> (b) nieskończenie wiele liczb złożonych?

Odpowiedzi na te pytania nie są znane, choć podejrzewa się, że są raczej pozytywne. A oto następne pytanie bez znanej odpowiedzi:

> Czy każda liczba Euklidesa jest bezkwadratowa, tzn. jest liczbą pierwszą lub iloczynem różnych liczb pierwszych?

Uczestnicy Konkursu Zadaniowego czasopisma *Matematyka* zmagali się z zadaniem:

> *Czy któraś z liczb Euklidesa jest potęgą liczby naturalnej (o wykładniku naturalnym większym od 1)?*

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna (*Matematyka* 1/1998, rozwiązanie zadania nr 1406, str. 47 i 48). Wykażemy teraz, że każda liczba Euklidesa e_n ma nie więcej niż n dzielników pierwszych. Niech $q_1, q_2, \ldots, q_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby $e_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Oczywiście

$$q_i > p_n \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, s.$$

Mamy

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ są liczbami naturalnymi. Dalej mamy

$$q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s} \geq q_1 q_2 \cdots q_s \geq p_{n+1}^s.$$

Wobec tego

$$(*) \qquad p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \geq p_{n+1}^s.$$

Z drugiej strony

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \leq p_n^n + 1 \leq (p_n + 1)^n \leq p_{n+1}^n.$$

Stąd i z $(*)$ otrzymujemy

$$p_{n+1}^s \leq p_{n+1}^n.$$

Zatem $s \leq n$. A tego właśnie mieliśmy dowieść.

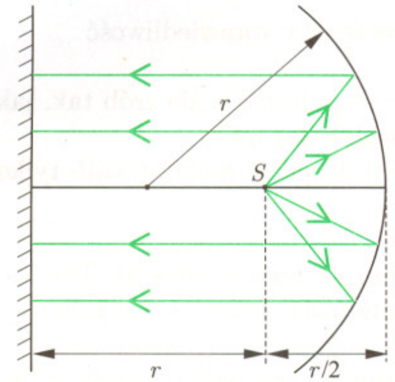
Na koniec jeszcze jedna hipoteza:

> Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych nie dzielących żadnej liczby Euklidesa.

Takimi liczbami pierwszymi są np. 2, 5, 11, 13, 17, 23, 29, 37 (dlaczego?).

Rozwiązanie zadania F 521.
Oświetlenie powierzchni przez punktowe źródło światła jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości tej powierzchni od źródła. Ponieważ ekran znajduje się w odległości r od źródła światła, a zwierciadło w odległości $r/2$, to stosunek oświetlenia ekranu do oświetlenia zwierciadła wynosi

$$\frac{E}{E'} = \frac{(\frac{1}{2}r)^2}{r^2} = \frac{1}{4}.$$



Źródło światła leży w ognisku zwierciadła wklęsłego, dlatego po odbiciu promienie będą tworzyły wiązkę równoległą. Padając na ekran, wiązka ta zwiększy jego oświetlenie o $4E$, a więc całkowite oświetlenie środka ekranu wyniesie

$$E + 4E = 5E,$$

czyli oświetlenie w tym punkcie zwiększy się pięciokrotnie.

Brytyjscy geofizycy po obliczeniach wykorzystujących mechanikę kwantową i, oczywiście, superkomputer, twierdzą, że w środku Ziemi panuje temperatura odpowiadająca atmosferze Słońca: około 5500° C.

Każdy ułamek między 0 i 1 można przedstawić jako sumę odwrotności różnych liczb naturalnych. Przepis jest prosty: odejmujemy stale największą odwrotność, jaką się (wśród liczb dodatnich) daje odjąć. Ale dlaczego to zawsze się skończy?