Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2000

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z matematyki nr 399, 400

Redaguje Marcin E. KUCZMA

399. Niech $n > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Ile jest permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ różnica $x_i - x_{i+1}$ dzieli się przez i?

400. *Pochodna iloczynu jest równa iloczynowi pochodnych* – pomyślał uczeń i zastosował „wzór" $(fg)' = f'g'$, uzyskując wszelako prawidłowy wynik. *Z pochodnymi drugiego rzędu musi być tak samo*: $(fg)'' = f''g''$; i znów dobry wynik! Co to za funkcje? Znaleźć wszystkie pary funkcji $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mających ciągłe pochodne drugiego rzędu, spełniających te dwa równania i takich, że ich iloczyn nie jest funkcją stałą.

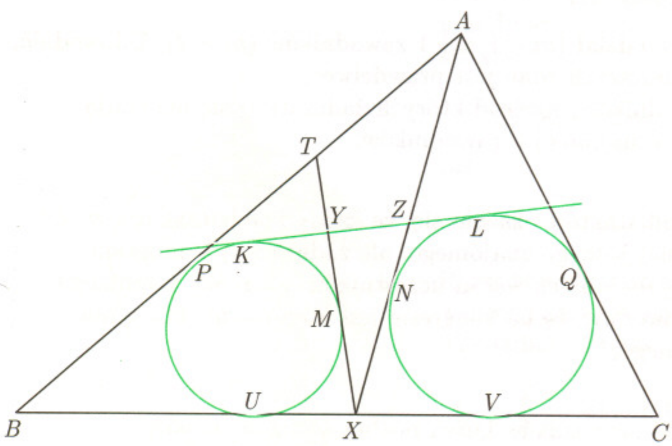
Zadanie **400** zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Krystian Bartniczek z Würselen.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1999

Przypominamy treść zadań:

391. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie T. Niech X będzie dowolnym punktem na boku BC (różnym od B i C). Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty BXT, TXA, AXC mają wspólną prostą styczną.

392. Dane są liczby całkowite x, y, z o tej własności, że liczba $x^{666} + y^{666} - z^{666}$ dzieli się przez 1999. Dowieść, że co najmniej jedna z liczb x, y dzieli się przez 1999.



391. Prowadzimy prostą nie mającą punktów wspólnych z odcinkiem BC, styczną do okręgów wpisanych w trójkąty BXT i AXC odpowiednio w punktach K i L. Punkty styczności pierwszego z tych okręgów z prostymi XT, TB, BX oznaczmy odpowiednio przez M, P, U. Punkty styczności drugiego z tych okręgów z prostymi AX, CA, XC oznaczmy odpowiednio przez N, Q, V. Prosta KL przecina odcinek TX w punkcie Y, a odcinek AX w punkcie Z. Ponieważ T jest punktem styczności boku AB trójkąta ABC z okręgiem wpisanym w ten trójkąt, zatem

$$(*) \qquad 2 \cdot |AT| = |AB| + |AC| - |BC|.$$

Zauważmy, że

$$|AB| = |AT| + |TP| + |PB| = |AT| + |TM| + |BU|,$$
$$|AC| = |AQ| + |QC| = |AN| + |CV|,$$
$$|BC| = |BU| + |UV| + |VC| = |BU| + |KL| + |CV|.$$

Podstawiamy te równości do wzoru $(*)$ i po redukcji otrzymujemy

$$|AT| = |TM| + |AN| - |KL|.$$

Skoro zaś $|TM| = |TY| + |KY|$, $|AN| = |AZ| + |ZL|$, zatem ostatecznie

$$|AT| = |TY| + |AZ| + |KY| + |ZL| - |KL| = |TY| + |AZ| - |YZ|.$$

Stąd wynika, że w czworokąt $ATYZ$ można wpisać okrąg, i mamy tezę zadania.

392. Przyjmijmy $n = 666$. Liczba $3n + 1 = 1999$ jest pierwsza. Wszystkie kongruencje w tym rozwiązaniu są brane (mod 1999). Daną w założeniu zależność $x^n + y^n \equiv z^n$ podnosimy stronami do trzeciej potęgi:

$$x^{3n} + 3x^n y^n (x^n + y^n) + y^{3n} \equiv z^{3n}.$$

Sumę $x^n + y^n$ zastępujemy przez z^n:

$$x^{3n} + 3(xyz)^n + y^{3n} \equiv z^{3n}.$$

Przypuśćmy, że $x \not\equiv 0$ oraz $y \not\equiv 0$; wówczas $x^{3n} \equiv 1$ oraz $y^{3n} \equiv 1$ (na podstawie małego twierdzenia Fermata), i otrzymujemy

$$2 + 3(xyz)^n \equiv z^{3n}.$$

Widać stąd, że także $z \not\equiv 0$, a więc $z^{3n} \equiv 1$. Dostajemy kongruencję $3(xyz)^n \equiv -1$; podnosimy ją stronami do trzeciej potęgi:

$$27(xyz)^{3n} \equiv -1,$$

i mamy sprzeczność, skoro $x^{3n} \equiv y^{3n} \equiv z^{3n} \equiv 1$.

Uczynione przypuszczenie musiało być fałszywe. Tak więc $x \equiv 0$ lub $y \equiv 0$.

Zadania z fizyki nr 296, 297

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2000

296. Gęstość masy pewnej planety zależy liniowo (tzn. wg wzoru $\rho = \rho_0 - kr$) od odległości r od jej środka, przy czym na powierzchni planety spada do 1/4 gęstości maksymalnej. W jakiej odległości od środka natężenie pola grawitacyjnego jest maksymalne?

297. Jak wiadomo, ruch elektronu należy rozpatrywać jako rozprzestrzenianie się fali o długości danej wzorem $\lambda = h/p$. Częstotliwość tej fali z kolei możemy znaleźć ze wzoru $\nu = E/h$ (wzór ten najczęściej bywa podawany w związku z kwantami promieniowania, ale jednak stosuje się także do cząstek mających masę – vide równanie Schrödingera). Dla elektronu swobodnego $E = E_{\mathrm{kin}} = mv^2/2$ (o ile prędkość jest nieduża w porównaniu z prędkością światła), a dalej, mnożąc długość fali przez jej częstotliwość, otrzymamy prędkość $v = \lambda\nu = E/p = v/2$. Gdzie tkwi błąd?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 284 (WT=1,30) i 285 (WT=3,10) z numeru 10/1999

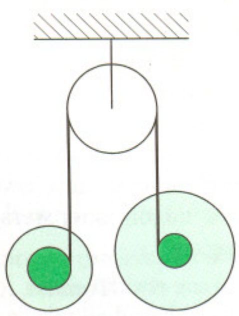
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	31,95
Aleksander Surma	– Myszków	28,70
Artur Arciszewski	– Kielce	24,70
Jarosław Łazuka	– Warszawa	22,73
Marek Wójcicki	– Szczecin	19,25
Tomasz Rudny	– Warszawa	17,17

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1999

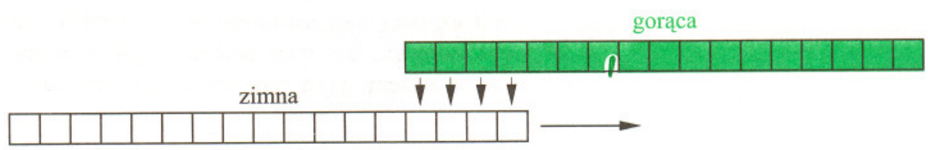
Przypominamy treść zadań:

288. Zabawka „jojo" składa się z dwóch jednorodnych walców o promieniu R_1 i łącznej masie m_1, połączonych ośką – walcem o promieniu r_1 i bardzo małej masie. Dla drugiej takiej zabawki analogiczne parametry są równe R_2, m_2 i r_2. Na ośkach nawinięto końce długiej nici, którą przełożono przez blok (rys. 1), po czym oba „joja" puszczono. Jeśli masę bloku i tarcie w jego osi można pominąć, to jaki związek muszą spełniać wymienione parametry, aby „joja" spadły z tej samej wysokości w ciągu tego samego czasu?

289. Mamy dwa kilogramy wody A o temperaturze 0°C i jeden kilogram wody B o temperaturze 100°C. Jaka jest maksymalna temperatura, do której możemy ogrzać wodę A, korzystając z ciepła dostarczonego przez wodę B? Rozważyć dwa warianty zadania:
a) Możemy dzielić każdą wodę na dowolną liczbę części, wlewać do naczyń umożliwiających wymianę ciepła (bez mieszania) i ponawiać te czynności dowolną ilość razy. Na końcu należy zlać całą wodę A do jednego naczynia – temperatura po jej wyrównaniu jest wielkością szukaną.
b) Oprócz czynności wymienionych wyżej możemy użyć silnika cieplnego korzystającego z wody gorącej jako grzejnika, a z zimnej jako chłodnicy. Pracę tego silnika można zmagazynować i zużytkować w dowolny sposób, np. do napędu chłodziarki oziębiającej jedną wodę, a ogrzewającej inną.
Ciepło właściwe wody uznajemy za stałe.



Rys. 1



Rys. 2

288. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N, a przyspieszenie obu zabawek (z założenia jednakowe) przez a. Równania ruchu postępowego mają postać

$$m_1 a = m_1 \mathrm{g} - N, \qquad m_2 a = m_2 \mathrm{g} - N,$$

a stąd

$$m_1(\mathrm{g} - a) = m_2(\mathrm{g} - a).$$

Po odrzuceniu rozwiązania $a = \mathrm{g}$ (obrót walców wymaga, aby siła napięcia nici była różna od zera) otrzymujemy wynik $m_1 = m_2$. Promienie walców nie mają – jak widać – żadnego znaczenia.

289. a) Podzielmy obie partie wody na n jednakowych części i przeprowadźmy wymianę ciepła na zasadzie przeciwprądu (rys. 2). Wyniki eksperymentu komputerowego są następujące: dla dużych n cała woda B oziębi się do temperatury bardzo bliskiej 0°C, natomiast temperatura kolejnych części wody A będzie różna – pierwsza połowa ogrzeje się do temperatury bliskiej 100°C, a druga pozostanie w temperaturze bliskiej 0°C (im większe n, tym mniej wody będzie miało temperaturę pośrednią). Zatem po wyrównaniu temperatura wody A będzie bliska 50°C.

b) Podczas działania idealnego silnika cieplnego (a także idealnej chłodziarki) spełnione jest równanie

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{T_1} = -\frac{\mathrm{d}Q_2}{T_2},$$

gdzie $\mathrm{d}Q_1$ i $\mathrm{d}Q_2$ są ciepłami oddanymi grzejnikowi i chłodnicy, a T_1 i T_2 – ich temperaturami. Podstawiając $\mathrm{d}Q_1 = m_1 c \mathrm{d}T_1$, $\mathrm{d}Q_2 = m_2 c \mathrm{d}T_2$ i całkując, otrzymujemy $m_1 \ln T_1 + m_2 \ln T_2 = \mathrm{const}$, czyli w naszym przypadku

$$2 \ln 273 + \ln 373 = 2 \ln T_A + \ln T_B,$$

gdzie T_A i T_B są końcowymi temperaturami wody A i B. Ponadto z zasady zachowania energii mamy

$$2 \cdot 273 + 373 = 2T_A + T_B.$$

Oprócz fizycznie nieistotnego rozwiązania $T_A = 273$ K, $T_B = 373$ K istnieje drugie: $T_A = 337{,}4$ K, $T_B = 244{,}2$ K. W skali Celsjusza otrzymaliśmy więc temperaturę wody A równą 64,4°C.