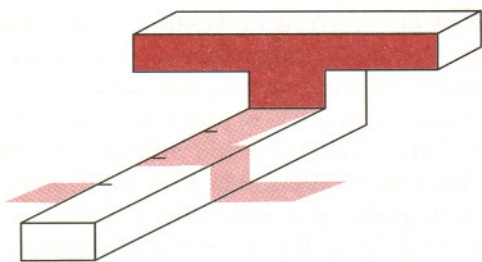


Zegary słoneczne

Przemysław OLBRATOWSKI

W najdawniejszych czasach ludzie określali pory roku i dnia obserwując ruchy gwiazd, Księżyca, a przede wszystkim dzienną wędrówkę Słońca. Z czasem zaczęto wznosić specjalne budowle ułatwiające te obserwacje. W trzecim tysiącleciu p.n.e. w Egipcie, Babilonii, Chinach i Indiach pojawiły się gnomony, czyli różnego rodzaju pionowe słupy lub obeliski, których cień pozwalał na dokładniejsze określenie położenia Słońca na niebie. W północnej Europie często spotykało się natomiast kamienne kręgi spełniające rolę kalendarza – jeżeli stało się w ich środku, to można było określić porę roku na podstawie tego, zza którego głazu weszło lub za który zaszło Słońce. Najslawniejszą tego typu konstrukcją jest Stonehenge w Anglii, zbudowany prawdopodobnie około 1840 roku p.n.e.

Zgodzimy się chyba ze stwierdzeniem, że porę dnia łatwiej jest określić na podstawie długości cienia niż jego kierunku, zwłaszcza jeżeli jest się w nieznanym terenie i nie ma do dyspozycji kompasu. Zapewne dlatego jako pierwsze pojawiły się tzw. zegary cieniowe, mające podziałkę, z której porę dnia odczytywało się z długości cienia. Wynaleziono je w Egipcie około roku 2000 p.n.e., a funkcjonowały także w wersji przenośnej – np. do użytku podczas bitew.



Rys. 1. Schemat egipskiego zegara cieniowego.

Najstarsze zegary, w których wykorzystano kierunek cienia, pochodzą również z Egiptu, z około 800 roku p.n.e. Od tamtego czasu stały się podstawowym, wzorcowym przyrządem do odmierzenia czasu. Rozpowszechnienie zegarów słonecznych było większe, niż nam się na ogół wydaje – np. w Średniowieczu na mocy dekretu papieskiego umieszczano je na wieżach wszystkich kościołów, aby wierni mogli punktualnie przybyć na nabożeństwo. Wersje kieszonkowe były używane – szczególnie podczas podróży – aż do końca XIX w., ponieważ do tego czasu były znacznie tańsze od zegarków mechanicznych.

Deklinacja Słońca, czyli kąt δ pomiędzy promieniem słonecznym a płaszczyzną równika Ziemi, zależy od pory roku i przyjmuje wartości od $-23^{\circ}27'$ podczas przesilenia zimowego do $+23^{\circ}27'$ podczas przesilenia letniego. Wartości ujemne oznaczają, że Słońce znajduje się na południe od płaszczyzny równika, a dodatnie – że na północ. W dniach obu równonocy deklinacja jest równa 0° . Fakty te są prostą konsekwencją tego, że płaszczyzna równika jest nachylona do płaszczyzny ekliptyki (czyli płaszczyzny, po której Ziemia obiega Słońce) właśnie pod kątem $\varepsilon = 23^{\circ}27'$. Łatwe rozważania geometryczne pozwalają przekonać się, że zależność deklinacji δ od dnia roku dana jest wzorem: $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \nu$, gdzie ν jest kątem, który Ziemia przebiegła wokół Słońca od równonocy wiosennej.

Podstawy matematyki w wieku XX

4. Polacy; podsumowanie

Wiktor MAREK,
Jan MYCIELSKI

Poprzednie części artykułu ukazały się w *Deltach*: 9/1999, 11/1999 i 1/2000.

Spójrzmy teraz na rolę Polski w rozwoju dwudziestowiecznych podstaw matematyki. Odzyskanie niepodległości Polski w roku 1918 zbiegło się ze znacznym ożywieniem badań naukowych. Wydawane w Polsce „Fundamenta Mathematicae” (których pierwszy tom ukazał się w roku 1920) skoncentrowały się na tematyce szeroko pojętych podstaw matematyki. Profil „Fundamentów” był i jest szerszy niż tylko logika i teoria mnogości – bardzo silnie reprezentowana jest tam topologia, o której tu nic nie piszemy. Niemniej jednak od samego początku „Fundamenta” publikowały wiele zasadniczych prac w dziedzinie podstaw matematyki.

Do „wielkich nazwisk” podstaw matematyki w Polsce między wojnami należą: Kuratowski, Sierpiński, a zwłaszcza Tarski. Wyniki tych badaczy znajdują się dziś w podręcznikach logiki i teorii mnogości. Lista ważniejszych wyników zarówno ich, jak i ich współpracowników, jest długa i trudno byłoby adekwatnie przedstawić wszystkie. Z konieczności wspomnimy tylko najważniejsze kierunki. Podstawy w Polsce między wojnami uprawiane były głównie w Warszawie i we Lwowie. Badania w dziedzinie „czystej” teorii mnogości prowadzili Sierpiński i Tarski, w dziedzinie „dużych” liczb kardynalnych Sierpiński, Tarski i Ulam (stąd właśnie wzięły się liczby mierzalne wspomniane poprzednio).

Ulepszając wcześniejsze twierdzenie Hausdorffa, w 1924 r. Banach i Tarski pokazali, jak można rozłożyć kulę na skończoną liczbę odpowiednich części i z tych samych części złożyć dwie kule, obie tej samej wielkości, co wyjściowa kula.

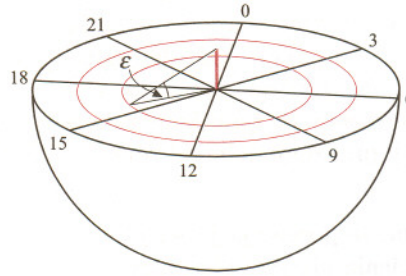
Oczywiście, części takie nie mogą być mierzalne (no bo wtedy już łatwo wykazać, że $1 = 2$). Istnienie takiego rozkładu wymaga założenia aksjomatu wyboru.

Powojenne badania determinacji (Steinhaus i Mycielski) dały bogatą teorię zbiorów bez tego paradoksu. W teorii tej wszystkie zbiory są mierzalne.

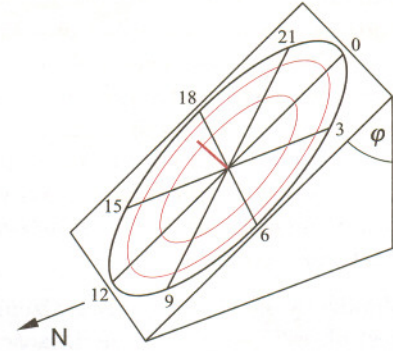
Tarski wprowadził definicję spełniania i wykazał jego podstawowe własności. Był to prawdziwy początek teorii modeli. Tarski wykazał też twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy, udowodnił wiele twierdzeń o liczbach kardynalnych oraz twierdzenie o rozstrzygalności geometrii elementarnej. Badano też problemy związane z aksjomatem wyboru (Tarski, Lindenbaum i Mostowski), deskryptywną teorię mnogości (Kuratowski, Sierpiński, Tarski i inni) i teorię „części i całości” (Leśniewski, Tarski). We wszystkich tych dziedzinach znaczące były wyniki Alfreda Tarskiego. Jego wszechstronne zainteresowania i mnogość twierdzeń doprowadziły do rozkwitu podstaw w Polsce w latach międzywojennych.

W czasie drugiej wojny światowej zginęło wielu polskich matematyków, w szczególności logicy Lindenbaum i Wajsberg, a inni rozproszyli się po świecie. Tarski znalazł pracę w Uniwersytecie Stanu Kalifornia w Berkeley. Szczęściem, w Polsce pojawiła się nowa generacja badaczy podstaw, a jako uboczny wynik rządów komunistycznych uległa też zmianie organizacja nauki, stwarzając wiele nowych miejsc, gdzie matematyka (w tym podstawy) mogła być uprawiana. Na okres powojenny przypadł rozkwit twórczości Andrzeja Mostowskiego. Do swojej śmierci w r. 1975 odgrywał on wielką rolę w badaniach podstaw matematyki w Warszawie. Grupa jego uczniów (Ehrenfeucht, Grzegorzczak, Marek, Rasiowa i Sikorski), a także matematycy wrocławscy (w tym Łoś, Mycielski, Pacholski, Ryll-Nardzewski i Węglorz) wznowili i rozwinęli badania podstaw. W Warszawie uzyskano znaczące wyniki w teorii rekursji, zupełności arytmetyki, teorii mnogości, logikach nieklasycznych i innych dziedzinach. Kiedy w r. 1950 Tarski zaproponował program badań teorii modeli, Mostowski i jego współpracownicy (szczególnie Ehrenfeucht) odegrali w nim dużą rolę, np. znaleźli tzw. metodę elementów nieodróżnialnych. Łoś (który pracował we Wrocławiu, a później w Toruniu i w Warszawie) wprowadził fundamentalną konstrukcję ultraprodktu, a także pojęcie „kategoryczności w mocy”, jedno z podstawowych narzędzi teorii modeli.

Wyobraźmy sobie, że Ziemię przecięto na pół, usunięto półkulę północną i na środku postawiono pionowo wskazówkę, czyli słupek o pewnej wysokości – sytuację taką przedstawia rysunek 2. Ponieważ Ziemia obraca się dookoła własnej osi z prędkością 15° na godzinę, więc cień wskazówki będzie się przesuwał po płaszczyźnie równika z tą samą prędkością. Jeżeli zatem na przeciętej Ziemi narysujemy proste rozbiegające się od wskazówki w odstępach kątowych co 15° , to z tak uzyskanej skali będzie można odczytać godzinę.



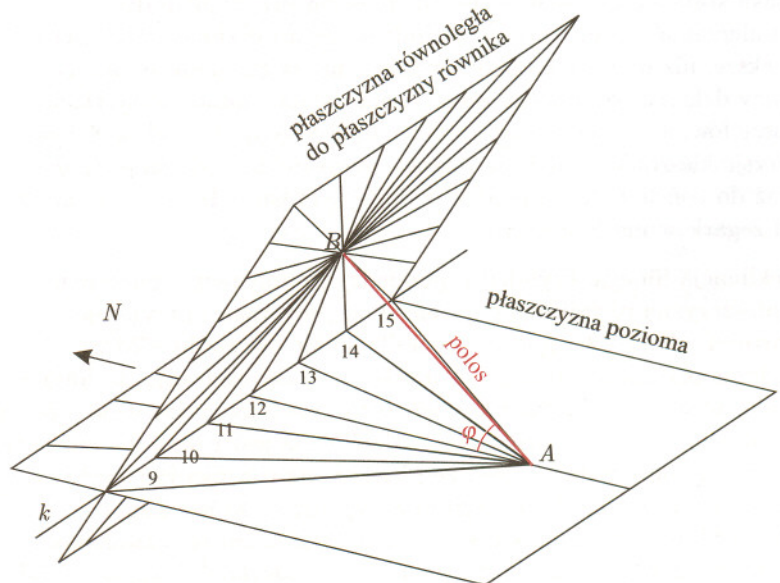
Rys. 2. Zegar słoneczny utworzony z Ziemi przeciętej wzdłuż płaszczyzny równika (długość cienia jak w pierwszym dniu lata).



Rys. 3. Sposób ustawienia zegara równikowego. Kąt φ oznacza szerokość geograficzną.

Linia odpowiadająca godzinie 0 powinna być poprowadzona w kierunku południka, dla którego chcemy wyskalować zegar. Znając dla danego dnia deklinację δ oraz wysokość h wskazówki, można obliczyć długość cienia: $l = h \operatorname{ctg} \delta$. Rysując okręgi o promieniach równych długości cienia dla poszczególnych dat, otrzymujemy skalę, z której można odczytać dzień roku. Skonstruowaliśmy więc zegar z datownikiem! Oczywiście w praktyce zamiast przecinania Ziemi należy użyć np. płaskiej deseczki umieszczonej równolegle do płaszczyzny równika ze wskazówką równoległą do osi Ziemi. Taką pozycję uzyskujemy, ustawiając tarczę zgodnie z rysunkiem 3. Zwróćmy uwagę, że na półkuli południowej deseczka powinna być pochylona w przeciwną stronę.

Dotychczas opisaliśmy tzw. zegar równikowy. Zastanówmy się, jak będzie wyglądać skala na tarczy umieszczonej poziomo. W tarczę tę wbijemy nie pionowy gnomon, ale wskazówkę pochyloną tak, aby

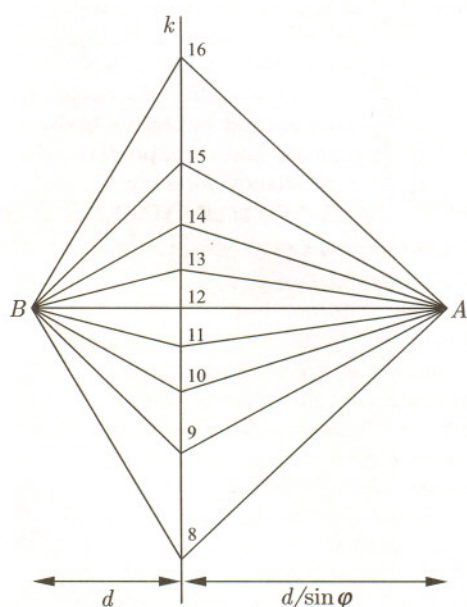


Rys. 4. Zasada konstrukcji podziałki godzinowej zegara poziomego; polos (odcinek AB) jest równoległy do osi Ziemi.

była równoległa do osi Ziemi – podobnie jak w zegarze równikowym. Taka skośna wskazówka nazywa się polosem – odpowiednia ilustracja znajduje się na rysunku 4. Oprócz płaszczyzny tarczy narysowano tam płaszczyznę przechodzącą przez koniec polosu i prostopadłą do niego, czyli równoległą do płaszczyzny równika. Jest na niej naniesiona znana nam już podziałka godzinowa zegara równikowego w postaci prostych co 15° . Proste te przecinają tarczę poziomą w oznaczonych numerami godzin punktach układających się na prostej k będącej przecięciem obu płaszczyzn. Chwila zastanowienia prowadzi do wniosku, że cień polosu odpowiadający np. godzinie 14 leży na prostej łączącej podstawę polosu A z punktem 14 – linia ta jest bowiem przecięciem płaszczyzny tarczy z płaszczyzną zawierającą polos i kierunek „do Słońca” o tej godzinie.

Taki obraz nasuwa pomysł następującej konstrukcji pokazanej na rysunku 5. Prowadzimy na płaszczyźnie prostą k . W pewnej odległości d umieszczamy punkt B , a po drugiej stronie, w odległości $d/\sin\varphi$ – punkt A w taki sposób, aby punkty te leżały na prostopadłej do k . Z B prowadzimy proste co 15° tak, by jedna z nich była prostopadła do k . Ich przecięcia z k oznaczamy numerami, jak na rysunku. Następnie kreślimy proste przechodzące przez punkt A oraz punkty oznaczone numerami – stanowią one tarczę poziomego zegara słonecznego. Polos należy wbić w punkcie A i pochylić w kierunku punktu B . Dlaczego tak jest? Jeżeli zagniemy płaszczyznę wzdłuż prostej k i przechylimy lewą część do góry, to punkt B oprze się o koniec polosu i uzyskamy sytuację z rysunku 4. Tarczę zegara poziomego można więc wykreślić, używając niemalże samej linijki bez podziałki i cyrkla, raz tylko wykorzystując kątomierz – przy wyznaczaniu odległości $d/\sin\varphi$.

Wykreślenie podziałki datownika jest już nieco trudniejsze. Nie będziemy tego opisywać ufając, że zainteresowani Czytelnicy, znając wzór na deklinację Słońca, sami będą w stanie rozwiązać ten problem. Wyobraźmy sobie, że na rysunku 4 płaszczyzna równoległa do płaszczyzny równika została poprowadzona nie przez koniec polosu B , ale przez jego podstawę A , i że narysowano na niej okręgi podziałki datowej zegara równikowego. Podziałką datową zegara



Rys. 5. Metoda wykreślenia tarczy zegara poziomego.

poziomego będą rzuty środkowe tych okręgów na poziomą tarczę z końca polosu B . Jest faktem znanym z geometrii, że rzuty środkowe okręgów na płaszczyznę mogą być hiperbolami, parabolami, elipsami, okręgami lub prostymi. W naszych szerokościach geograficznych otrzymamy hiperbole oraz prostą dla równonocy. Kompletna tarcza wykreślona dla szerokości Warszawy ($\varphi = 52^\circ 15'$) jest pokazana na okładce. Przeciwprostokątna zaznaczonego trójkąta jest polosem. Trójkąt należy „postawić”, aby polos mógł pełnić swoją funkcję.

Prace Cohena spowodowały, że wielu uczniów Mostowskiego zajęło się modelami teorii mnogości i jej fragmentów. To z kolei doprowadziło do uogólnień pojęcia kwantyfikatora, a także do badań fragmentów arytmetyki (istotnych w podstawach informatyki). Istotne też były wyniki Szmielew, w tym dowód rozstrzygalności teorii grup abelowych i wiele rezultatów w podstawach geometrii. Rasiowa i Sikorski rozwijali algebraiczne podejście do logiki. Dalsze badania Rasiowej ewoluowały w kierunku podstaw informatyki, prowadząc do nowych zastosowań podstaw.

We Wrocławiu działali: Łoś, Ryll-Nardzewski i Słupecki, którzy uzyskali ważne wyniki w teorii modeli (wspomniane wyżej) oraz w aksjomatyzacji arytmetyki. Tam też, w roku 1961 Mycielski i Steinhaus sformułowali aksjomat determinacji. Teoria determinacji należy nadal do bardzo żywych tematów teorii mnogości.

I dzisiaj badania podstaw kontynuowane są w Polsce, przede wszystkim w Uniwersytecie Warszawskim, Uniwersytecie Wrocławskim i Instytucie Matematycznym PAN, a także w innych ośrodkach. Można oczekiwać, że i dalej będą prowadzone.

Czas na podsumowanie. Spytajmy więc, jakie są największe osiągnięcia podstaw matematyki w dwudziestym wieku? Wskażemy tu trzy, naszym zdaniem, najważniejsze.

- Został zbudowany ścisły język dla matematyki. Możemy więc dziś powiedzieć, czym są zdania matematyczne oraz co to jest dowód, czyli wyprowadzenie zdania z jakiegoś zbioru aksjomatów. Twierdzenie Gödla o zupełności dla logiki pierwszego rzędu pokazuje adekwatność tego pojęcia dowodu względem sprecyzowanej przez Tarskiego semantyki opartej na pojęciu struktury relacyjnej (modelu). Matematycy dawniejszych wieków odwoływali się do intuicji logicznej, która dopiero w XX wieku została w pełni opisana i wyjaśniona.

- Została zbudowana aksjomatyczna teoria mnogości oparta na jednym pojęciu pierwotnym: należeniu elementu do zbioru. Dzisiejsza matematyka jest ugruntowana na tej teorii. Jej aksjomaty są tak proste, że można je zmieścić na jednej stronie. Niemniej teoria mnogości Zermelo–Fraenkla (ZFC) nie rozstrzyga wielu pytań z zakresu arytmetyki liczb

naturalnych lub podstaw analizy matematycznej. Nadal trwa rozbudowa teorii ZFC za pomocą nowych mocnych aksjomatów.

- Została zbudowana teoria funkcji obliczalnych i algorytmów. Mamy jasne rozróżnienie między ogólnym pojęciem funkcji a jego podklasą funkcji obliczalnych (o argumentach i wartościach naturalnych lub rzeczywistych). Znikło dawne pomieszanie między ogólnym pojęciem funkcji i bardziej specjalnym pojęciem funkcji obliczalnych. Badane są też bardziej konkretne pojęcia (na przykład klasy PTIME i NPTIME).

Zatem podstawy matematyki uległy wielkiemu rozwojowi w XX wieku, pomimo tego, że naturalna hipoteza, iż podstawowe teorie matematyczne (PA, ZFC) są zupełne, została obalona przez Gödla. Stwierdzenie Hilberta, że „Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć” okazało się zbyt śmiałe – matematyka jest bogatsza i mniej uchwytna, niż sądzono. A jednak uzyskano odpowiedzi na podstawowe pytania XIX wieku i odpowiedzi te okazały się zaskakujące i piękne. Nasuwa się pytanie, czy podstawy matematyki (i informatyki) za sto lat będą nadal oparte na pojęciach, na których były oparte w wieku dwudziestym? Zaryzykujemy twierdzenie, że uniwersum zbiorów z relacją należenia pozostanie fundamentalną strukturą, na której opierać się będzie cała matematyka.

Na zakończenie sformułujemy trzy otwarte problemy podstaw matematyki, które wydają się nam szczególnie ważne.

- *Rozwinąć efektywne metody automatycznego budowania dowodów hipotez matematycznych, a przynajmniej takich, które mają proste dowody!*

Istnieją już interesujące metody tego rodzaju (zajmuje się tym dziedzina nazywana „automatyczne dowodzenie twierzeń”), ale te metody ani nie umieją budować większości dowodów, które matematykom wydają się łatwe, ani dowody, które te metody budują, matematykom nie wydają się łatwe. Poza tym dotychczasowe metody nie są dynamiczne w tym sensie, że nie umieją posługiwać się wiedzą matematyczną, którą można by im dostarczać. Mamy nadzieję, iż postępy sztucznej inteligencji w XXI wieku doprowadzą do znalezienia efektywnych, dynamicznych, metod dowodzenia hipotez matematycznych.

Mówiąc o zegarach słonecznych, spotykamy się z czterema wielkościami – są to: szerokość geograficzna, kierunek północ-południe, data i godzina. Dotychczas zajmowaliśmy się wyznaczaniem daty i godziny, gdy dana była szerokość geograficzna oraz kierunek północ-południe. Za pomocą odpowiednio skonstruowanych zegarów można wyznaczyć dowolne dwie spośród tych wielkości, znając dwie pozostałe. Podczas górskiej wycieczki może się zdarzyć, że znamy szerokość i datę, a nie wiemy, gdzie jest północ i która godzina. Informacje te możemy uzyskać np. za pomocą zegara równikowego – takiego, jak na rysunku 3. Kąt pochylenia tarczy jest ustalony. Stawiamy zegar na poziomej powierzchni i tak obracamy całość, aby koniec cienia znalazł się na okręgu odpowiadającym właściwej dacie. Z podziałki godzinowej odczytujemy wtedy godzinę, a ustawienie zegara wskazuje północ. Okazuje się, że taki słoneczny kompas jest lepszy od kompasu magnetycznego. Czytelnicy nie będą zapewne mieli problemu z wyjaśnieniem, jak to samo zrobić za pomocą zegara poziomego.

W przeszłości budowano wiele typów zegarów o różnych tarczach – płaskich, walcowych, kulistych wklęsłych i wypukłych. Do ciekawszych należały tzw. zegary magnetyczne, które należało tak obrócić, aby cień padł w ściśle określone miejsce, a wtedy godzinę pokazywała igła dołączonego kompasu. Konstruowano też zegary księżycowe – do użytku w nocy. Wiele ciekawych egzemplarzy można dziś zobaczyć w muzeum im. Przypkowskich w Jędrzejowie koło Kielc. Znajduje się tam trzecia co do wielkości kolekcja na świecie. Różne zegary są też pokazywane na Wydziale Fizyki UW, podczas Festiwalu Nauki we wrześniu każdego roku. Osoby zainteresowane zapraszamy na stronę internetową <http://zfjavs.fuw.edu.pl/~polbrat>, gdzie można obejrzeć zabytkowe zegary z całego świata oraz zegary słoneczne cyfrowe, pokazujące godzinę jak na wyświetlaczu elektronicznego zegarka! Na tej stronie znajduje się też program wykreślający pełną tarczę zegara poziomego dla dowolnych współrzędnych geograficznych.

W dowolnym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby wierzchołków trójściennych jest równa co najmniej 8. Tę najmniejszą sumę osiągają np. ośmiościan foremny ($8 + 0$), czworościan ($4 + 4$) i sześcian ($0 + 8$). A czy są jeszcze inni minimaliści?

Sześcian ma 11 różnych siatek (umawiamy się, że nie rozcinamy ścian, i że każda ściana łączy się całym bokiem z co najmniej jedną inną). A czworościan foremny ma ich 2. Pouczającym zajęciem jest obliczenie liczby różnych siatek dla pozostałych wielościanów foremnych.

Supernowa 1984 E jest jedną z bardzo nielicznych, które obserwowano przed eksplozją. Położona jest w galaktyce NGC 3169 i wybuchła 1 IV 1984 r. W jej widmie znaleziono linie wodorowe nie biorące udziału w wybuchu, co dowodzi, że wokół gwiazdy mogła istnieć już wcześniej otoczka wodorowa. Otóż w galaktyce tej w 1981 r. obserwowano punktowy obiekt z emisyjnymi liniami wodorowymi w tym właśnie miejscu, gdzie potem wybuchła supernowa, nie było natomiast tego obiektu na zdjęciach z 1961 r. Oznacza to, że otoczka wodorowa mogła powstać w ciągu kilku lat przed wybuchem w wyniku silnego wiatru gwiazdowego. Obserwacje robione po wybuchu nie znalazły już śladu otoczki. Biorąc pod uwagę, że 6 V 1984 r. już jej nie było i znając z obserwacji prędkość ekspandujących produktów wybuchu, ocenia się, że główna masa otoczki znajdowała się w odległości 200 j.a. od gwiazdy.