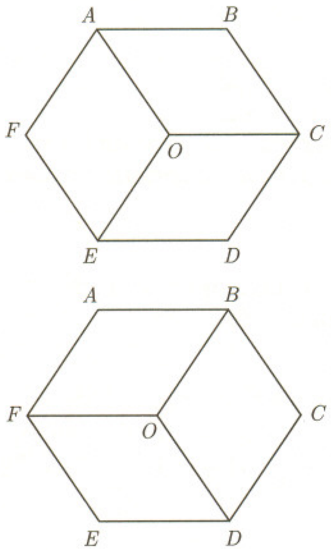
Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1999 r.

O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki

Jakub Onufry WOJTASZCZYK

Łatwo dowieść, że dowolny parzystokąt foremny można podzielić na romby o bokach tej samej długości co boki parzystokąta. Na ile sposobów da się to zrobić? Jasne jest, że dla kwadratu sposób jest tylko jeden, dla sześciokąta – dwa (rysunek). Dla ośmiokąta sposobów podziału jest osiem, dla dziesięciokąta – sześćdziesiąt dwa. Tempo wzrostu tych liczb zniechęca do bezpośredniego rozwiązywania problemu dla dwunastokąta (908 sposobów). Pojawia się zatem problem oszacowania rozważanych liczb, a także określenia ich własności.

Kluczem do rozwiązywania tego zagadnienia okazało się wymyślone przez Piotra Przytyckiego tzw. przedstawienie przez nici. Udowadniamy mianowicie, że w każdym podziale wielokąta występują ciągi rombów biegnące od dowolnego boku wielokąta do boku przeciwległego, złożone z rombów o jednej parze boków równoległej do tegoż boku wielokąta (na rysunku dla boku AB są to $ABCO$ i $COED$). Łączymy te boki krzywą, którą nazywać będziemy nicią. Postępując tak dla każdej równoległej pary boków wielokąta, otrzymamy układ nici. Otóż da się udowodnić, że dowolny układ takich krzywych skończonych otwartych, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, każde dwie przecinają się raz i tylko raz, oraz każdy koniec krzywej wychodzi poza pole objęte innymi krzywymi, jest układem nici, oraz że każdy układ nici spełnia podane wyżej trzy warunki. Umówmy się, że układy nici będziemy uważać za różne tylko wtedy, gdy różnią się kolejnością przecinania nici. Wówczas różne układy nici odpowiadają różnym podziałom wielokąta i zamiast liczyć podziały możemy liczyć układy nici.



W dowodzie tego wykorzystuję przydatny później i ciekawy sam w sobie lemat mówiący, że jeżeli w układzie nici pod daną nicią A jest chociaż jedno przecięcie dwóch innych nici, to istnieją takie nici B i C, że pola ograniczonego przez nici A, B i C nie przecinają żadne inne nici. Dowód przebiega następująco: weźmy takie nici B i C przecinające się pod A, że nici B nie przecina między A i C żadna nić. (Żeby znaleźć takie pole, wystarczy wziąć dowolną nić B przecinaną pod A oraz nić C przecinającą B najbliżej A.) Ponadto niech będą to nici takie, że pole ABC przecinane jest przez najmniejszą możliwą liczbę nici. Jeżeli ta liczba nie jest zerem, to rozpatruję nić D, która przecina C najbliżej A. Nici C między A i D nie przecina więc żadna nić, a dowolna nić przecinająca ADC przecina też ABC, poza tym ABC przecina jeszcze D, co przeczy minimalności ABC, więc ABC nie może przecinać żadna nić.

Łatwo spostrzec, że tę samą technikę możemy zastosować do dowolnego $2n$-kąta środkowosymetrycznego. Otrzymany zbiór układów nici będzie taki sam, jak dla $2n$-kąta foremnego, co oznacza, iż liczba podziałów każdego $2n$-kąta środkowosymetrycznego jest taka sama.

Jak widać, uzyskaliśmy dzięki pojęciu nici nowe, potężne narzędzie pracy. Za jego pomocą możemy osiągnąć z dużą łatwością dosyć dobre oszacowanie dolne oraz dosyć kiepskie oszacowanie górne. Najpierw zajmijmy się oszacowaniem dolnym.

Weźmy dowolny układ $n-1$ nici. Zastanówmy się, na ile sposobów pomiędzy nićmi 1 i $n-1$ możemy dodać nową nić. Możemy poprowadzić ją samą górą, tj. tak żeby pozostałe nici przecinała w kolejności $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Korzystając ze wspomnianego wcześniej lematu, wiem, że pod nicią n istnieje pole nie przecinane żadną nicią, czyli skrzyżowanie dwóch nici znajdujące się bezpośrednio pod n. Przełóżmy więc nić n na drugą stronę tego skrzyżowania, by otrzymać nowy układ. Procedurę powtarzamy, dopóki pod nicią n nie skończą się skrzyżowania, czyli $\binom{n}{2}+1$ razy. Taką operację możemy przeprowadzić dla każdego układu $n-1$ nici, za każdym razem otrzymując

Rozwiązanie zadania F 519.
Energia prądu elektrycznego jest zużywana na ogrzanie wody i na zamianę jej w parę, czyli:

$$\eta P t = cm(t_2 - t_1) + rm\ ,$$

gdzie $m = \rho V$ – masa wody w czajniku. Moc prądu $P = U^2/R$. Stąd otrzymujemy

$$t = \frac{\rho V[c(t_2 - t_1) + r]}{U^2\eta} R \approx 12 \text{ minut.}$$

Rozwiązanie zadania M 910.
Nie można. Dla skończonego zbioru parabol rozważmy dowolną prostą nie równoległą do żadnej z osi parabol. Przecięcie tej prostej z wnętrzem każdej z parabol jest skończonym odcinkiem. Dla dowolnej paraboli istnieje bowiem układ współrzędnych, w którym ma ona równanie $y = ax^2$ $(a > 0)$. Równanie rozważanej prostej ma w nim postać $y = kx + l$. Punkt (x, y), należący do przecięcia wnętrza paraboli i prostej, spełnia nierówność $kx + l > ax^2$, której zbiór rozwiązań jest albo pusty, albo jest odcinkiem (x_1, x_2), gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $ax^2 - kx - l$. Tak więc na rozważanej prostej istnieją punkty nie należące do wnętrza żadnej paraboli z danego skończonego zbioru.

$\binom{n}{2} + 1$ różnych układów. Wobec tego układów n nici jest przynajmniej $\binom{n}{2} + 1$ razy więcej niż układów $n - 1$ nici. To daje możliwość prostego rekurencyjnego oszacowania z dołu liczby podziałów.

Szacowanie z góry osiąga się następująco. W danym układzie n nici bierzemy wszystkie $\binom{n}{3}$ trójki nici. Porządkujemy każdą z nich i przypisujemy jej liczbę 0, jeżeli druga i trzecia nić przecinają się nad pierwszą, oraz liczbę 1, jeżeli jest przeciwnie. Przyporządkowaliśmy więc każdemu układowi n nici $\binom{n}{3}$ elementowy ciąg zero-jedynkowy. Łatwo udowodnić, że różnym układom przyporządkujemy różne ciągi. Skoro takich ciągów jest $2^{\binom{n}{3}}$, to układów n nici nie może być więcej.

Widać dużą rozbieżność między górnym i dolnym szacowaniem. Dość skomplikowanymi technikami jestem w stanie górne szacowanie poprawić do rzędu $n^{\binom{n}{2}/2}$ (na przytoczenie dowodu stanowczo nie mam miejsca), ale sukces jest niewielki, rozbieżność nadal pozostaje olbrzymia.

O własnościach liczb podziałów, które udowodniłem, tylko wspomnę, nie przytaczając nawet dowodu. Po pierwsze, liczba podziałów dzieli się przez 2 w potędze nie mniejszej niż ta, w której 2 dzieli liczbę boków wielokąta. Po drugie, jeżeli połowa liczby boków jest pierwsza, to liczba podziałów przy dzieleniu przez liczbę boków daje resztę dwa.

Na zakończenie podam dla zainteresowanych parę zadań i problemów (różnica jest taka, że zadanie umiem rozwiązać, a problem wręcz przeciwnie):

Z1) Udowodnić, że w dowolnym podziale 6000-kąta foremnego istnieje przynajmniej 2000 punktów, w których stykają się dokładnie trzy romby.
Z2) Udowodnić, że każdy układ nici spełnia podane w artykule trzy warunki.
Z3) Udowodnić, że spośród wielokątów wypukłych tylko wielokąty środkowosymetryczne są podzielne na skończoną liczbę równoległoboków.

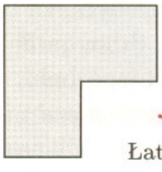
(Zadania Z1 i Z3 są inspirowane zadaniami z obozu Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 98.)

P1) Udowodnić, że liczba podziałów $2n$-kąta jest mniejsza lub równa $2^{\binom{n}{2}}$ albo obalić tę tezę (acz głęboko wierzę, że jest prawdziwa).
P2) Znaleźć jakiekolwiek inne własności szczególne liczb podziałów.

Jeśli ktokolwiek chciałby podzielić się ze mną swymi przemyśleniami dotyczącymi tej tematyki (szczególnie interesuje mnie rozwiązanie problemu P1) bądź też chciałby poznać pełne dowody faktów przytoczonych w pracy, zapraszam do skontaktowania się ze mną za pośrednictwem Redakcji *Delty* lub poprzez e-mail: jw189208@zodiac.mimuw.edu.pl.

Zegar słoneczny słupkowy, Niemcy, 1611.

Rozwiązanie zadania M 912.
Wybierzmy układ współrzędnych tak, by równania paraboli miały w nim postać
$$y = px^2 + qx + r \quad \text{i} \quad y = p'x^2 + q'x + r'.$$
Niech odcięte punktów A_i i B_i będą równe odpowiednio a_i i b_i. Tangens kąta nachylenia prostej A_iA_j jest równy
$$\frac{(pa_i^2 + qa_i + r) - (pa_j^2 + qa_j + r)}{a_i - a_j} = p(a_i + a_j) + q,$$
a prostej B_iB_j analogicznie $p'(b_i + b_j) + q'$. Z warunków zadania wynika, że dla każdego $0 \le i \le 2n - 1$ zachodzi równość
$$(i) \qquad p(a_i + a_{i+1}) + q = p'(b_i + b_{i+1}) + q'.$$
Ponieważ odcinek A_0B_0 jest wspólną cięciwą obu parabol, więc
$$(*) \qquad p(a_0 + b_0) + q = p'(a_0 + b_0) + q'.$$
Mnożąc stronami przez -1 równania (1), (3), ..., $(2n - 1)$ i dodając je stronami do równań $(*)$, (2), (4), ..., $(2n)$, otrzymamy
$$p(a_{2n} + b_0) + q = p'(b_{2n} + a_0) + q',$$
co oznacza, że $A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0$.



Łatwo jest podzielić taką figurę na dwie lub na trzy jednakowe części. Jak podzielić ją na cztery jednakowe?