Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2000

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

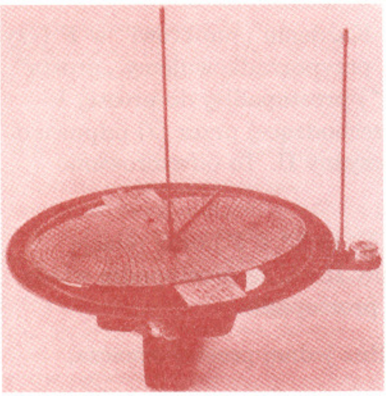
Zadania z matematyki nr 397, 398

Redaguje Marcin E. KUCZMA

397. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich $x \geq 0$. Udowodnić, że dla pewnej liczby naturalnej n wielomian $Q(x) = (1+x)^n P(x)$ ma wszystkie współczynniki nieujemne.

398. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą liczbę całkowitą, nie przekraczającą $\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}-1}$.

Zadanie **398** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.



Amerykański zegar słoneczny umieszczany na czołgach w czasie działań na Filipinach, 1942.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1999

Przypominamy treść zadań:

389. W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym" (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę. (Gracz A pokonał gracza C *pośrednio*, jeśli pokonał pewnego zawodnika B, który wygrał z C.) Dowieść, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

390. Prostokąt o bokach długości a, b $(a \geq b)$ dzielimy w dowolny sposób na n prostokątów o bokach równoległych do boków dużego prostokąta; n jest ustaloną liczbą naturalną. Dla każdego prostokącika obliczamy stosunek długości krótszego boku do długości dłuższego boku, a następnie obliczamy sumę tych stosunków. Znaleźć kres dolny wartości takich sum.

389. Niech A będzie tym jedynym zawodnikiem, który otrzymał nagrodę. Oznaczmy przez U zbiór tych zawodników, którzy wygrali z A, przez V zaś zbiór tych, którzy przegrali z A, i przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że zbiór U jest niepusty. Weźmy pod uwagę zawodnika $A^* \in U$, który bezpośrednio pokonał największą liczbę przeciwników ze zbioru U.

Jeżeli C jest dowolnym graczem ze zbioru U, który wygrał z A^*, to wśród zawodników $B \in U$, którzy przegrali z A^*, znajdzie się co najmniej jeden, który wygrał z C (w przeciwnym razie gracz C miałby w zbiorze U więcej przeciwników pokonanych bezpośrednio niż A^*). To znaczy, że A^* pokonał bezpośrednio lub pośrednio każdego zawodnika ze zbioru U.

Ponadto A^* pokonał bezpośrednio zawodnika A, i w konsekwencji pokonał pośrednio wszystkich zawodników ze zbioru V. Zgodnie z warunkami turnieju zawodnik A^* także powinien dostać nagrodę – wbrew założeniu, że nagrodę otrzymał tylko zawodnik A. Sprzeczność kończy dowód.

390. Oznaczmy przez a_i, b_i długości boków i-tego prostokącika $(a_i \geq b_i)$. Z zależności

$$ab = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \frac{b_i}{a_i} \leq a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}$$

wynika, że rozważana suma $S = \sum b_i/a_i$ spełnia nierówność $S \geq b/a$. Równość w tym oszacowaniu zachodzi, gdy $a_i = a$ dla każdego i, czyli gdy duży prostokąt jest podzielony na n pasków liniami równoległymi do jego dłuższego boku. Zatem kres dolny wartości S wynosi b/a.

Rozwiązanie zadania F 520.
Moc P_1, wydzielana na oporze R, w pierwszym przypadku jest równa

$$P_1 = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2},$$

gdzie $\mathcal{E}$ – siła elektromotoryczna baterii. Moc P_2, wydzielana na dwóch oporach połączonych równolegle, wynosi

$$P_1 = I_c^2 R_c = \frac{\mathcal{E}^2 R_c}{(R_c+r)^2},$$

gdzie $R_c = \dfrac{RR_x}{R+R_x}$. Zgodnie z warunkiem zadania mamy $P_1 = P_2$, zatem

$$\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 RR_x(R+R_x)}{[RR_x + r(R_x+R)]^2}.$$

Rozwiązując to równanie względem R_x, otrzymujemy

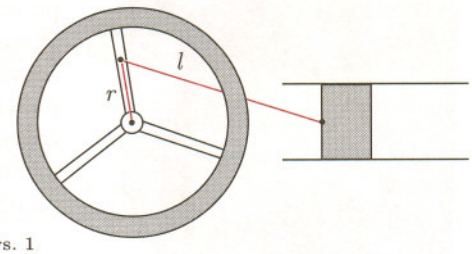
$$R_x = R\frac{r^2}{R^2-r^2} = 0{,}1125\ \Omega.$$

Zadania z fizyki nr 294, 295

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2000

294. Ciało o masie m („tłok") może się poruszać wzdłuż linii prostej i jest połączone przegubowo za pośrednictwem nieważkiego pręta z kołem zamachowym o momencie bezwładności I (rys. 1). Dane są: długość pręta l oraz odległość r punktu jego zamocowania na kole zamachowym od osi tego koła. Układ wprawiono w ruch. „Tłok" i koło poruszają się bez tarcia. Jeśli maksymalna prędkość kątowa koła jest równa ω_1, to ile wynosi jego minimalna prędkość kątowa ω_2? Obliczenia wykonać dla $l = 2r$.



Rys. 1

295. Mikroskop tworzy obraz powiększony 300-krotnie w odległości dobrego widzenia (25 cm) od oka obserwatora. Jaka powinna być dokładność ustawienia mikroskopu względem przedmiotu, jeśli odległość obrazu od oka ma nie różnić się od podanej wartości 25 cm więcej niż o 5 cm?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 282 (WT=3,00) i 283 (WT=3,87)
z numeru 9/1999

Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	31,95
Aleksander Surma	– Myszków	27,66
Artur Arciszewski	– Kielce	23,40
Jarosław Łazuka	– Warszawa	20,19
Grzegorz Miłoś	– Mielec	17,14
Marek Wójcicki	– Szczecin	16,97
Tomasz Rudny	– Warszawa	16,13

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1999

Przypominamy treść zadań:

286. Ocenić orientacyjnie maksymalną ilość (masę) tlenu, jaką może zawierać butla stalowa o rozsądnych rozmiarach i masie $m = 40$ kg, napełniona pod ciśnieniem równym połowie wartości, która spowodowałaby rozerwanie butli. Dane dotyczące stali wziąć z tablic.

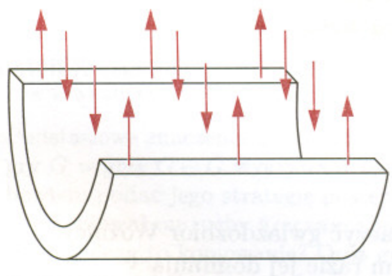
287. Mion rozpada się na elektron i dwa neutrina:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu .$$

Obliczyć maksymalną energię kinetyczną elektronu powstałego z rozpadu spoczywającego mionu. Masa mionu wynosi 105,6 MeV/c^2, masa elektronu – 0,51 MeV/c^2, a masę neutrin należy pominąć.

286. Przyjmijmy następujące założenia:

a) butla ma kształt długiego cylindra, przy czym pomijamy masę i objętość końcowych półkul,
b) grubość ścianek jest znacznie mniejsza od promienia cylindra,
c) rolę ciśnienia zewnętrznego można pominąć (standardowa wartość ciśnienia gazu w butlach jest ponad 100 razy większa),
d) obowiązuje równanie stanu gazu doskonałego.


Rys. 2

Oznaczmy promień cylindra przez r, jego długość przez l, grubość ścianek przez d, ciśnienie tlenu przez p, wytrzymałość stali na rozerwanie przez W, a gęstość stali przez ρ. Rozpatrując siły działające na jedną połowę butli (rys. 2), stwierdzamy, że siła parcia gazu $p \cdot 2lr$ równoważy się z iloczynem naprężenia przez pole przekroju stali. Podstawiamy naprężenie równe $\frac{1}{2}W$, a pole przekroju równe $2ld$, czyli

$$2pr = Wd.$$

Masa stali jest – zgodnie z przyjętym założeniem, że $d \ll r$ – dana wzorem $m = 2\pi r d l \rho$, natomiast masę M tlenu obliczymy z równania Clapeyrona

$$M = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{\mu}{RT} \cdot \frac{Wd}{2r} \cdot \pi r^2 l = \frac{\mu W}{RT} \cdot \frac{m}{4\rho}.$$

Podstawiając masę molową tlenu $\mu = 0{,}032$ kg, temperaturę $T = 290$ K i dane materiałowe stali $W = 10^9$ N/m^2, $\rho = 7800$ kg/m^3, obliczamy $M \approx 17$ kg. Interesujące jest, że przy ustalonej masie butli wynik nie zależy od wymiarów cylindra ani od grubości ścianek; natomiast przyjęcie, że butla ma kształt kuli, prowadzi do wzoru, w którym w mianowniku liczba 4 zostaje zastąpiona przez 3, czyli $M \approx 23$ kg.

287. Oznaczmy szukaną energię kinetyczną przez E, a łączną energię neutrin przez E_ν. Bilans energii ma postać

$$m_\mu c^2 = m_e c^2 + E + E_\nu,$$

natomiast z zasady zachowania pędu wynika, że pęd p elektronu jest równy łącznemu pędowi neutrin p_ν. Jak widać, maksymalną wartość E otrzymamy wtedy, gdy energia neutrin będzie minimalna. Taka sytuacja wystąpi, jeśli oba neutrina pobiegną w tym samym kierunku, gdyż wtedy $E_\nu = p_\nu c$ (w innym przypadku równanie to pozostałoby w mocy dla każdego z neutrin oddzielnie, ale łączny pęd byłby mniejszy od sumy długości wektorów, więc zachodziłaby nierówność $E_\nu > p_\nu c$). Po skorzystaniu z tożsamości

$$m_e c^2 + E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2}$$

dochodzimy do równania

$$E^2 + 2m_e c^2 E = p^2 c^2 = E_\nu^2 = (m_\mu c^2 - m_e c^2 - E)^2.$$

Znajdujemy $E = (m_\mu - m_e)^2 c^2/(2m_\mu) = 52{,}3$ MeV.