3/00 (27)

Γ limatias $n \to \infty$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (21)

TWIERDZENIE: Dla dowolnej liczby nieparzystej $n > 3$ istnieją takie liczby całkowite a i k, że $1 \le a \le n-2$, $k > 1$ oraz

$$a^k \equiv -1 (\mathrm{mod}\, n) .$$

Dowód: Skorzystamy ze znanego twierdzenia: jeśli liczby a i n są względnie pierwsze, to istnieje taka liczba naturalna r, że

$$a^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n) .$$

Stosujemy powyższe twierdzenie do $a = 2$. Niech r. będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią spełniającą kongruencję

$$2^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n) .$$

Jeśli r jest parzyste, to z założenia minimalności r mamy $2^{r/2} \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$, a ponieważ $2^{r/2} \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, n)$, zatem musi być $2^{r/2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, n)$. Wystarczy więc przyjąć $k = r/2$.

Jeśli natomiast r jest nieparzyste, to mamy $(-2)^r \equiv$ $\equiv -1 (\mathrm{mod}\, n)$, wystarczy więc przyjąć $a = n - 2$ oraz $k = r$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (20″)

Wyjaśnienie oszustwa (20′): Oczopląs oczopląsem, a błędne wzory na początku rozwiązania pozostały. Prawdziwa jest jednak równość podana w treści zadania! Najmniejsza wspólna wielokrotność jest wprawdzie równa iloczynowi podzielonemu przez największy wspólny dzielnik, ale tylko dla dwóch liczb. Dla trzech liczb odpowiedni wzór jest bardziej złożony

$$[a,b,c] = \frac{abc \cdot (a,b,c)}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)} .$$

Poprawne rachunki wyglądają więc następująco

$$\frac{[a,b] \cdot [b,c] \cdot [c,a]}{[a,b,c]^2} = \frac{\frac{ab}{(a,b)} \cdot \frac{bc}{(b,c)} \cdot \frac{ca}{(c,a)}}{\frac{a^2b^2c^2 \cdot (a,b,c)^2}{(a,b)^2 \cdot (b,c)^2 \cdot (c,a)^2}} = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{(a,b)^2 \cdot (b,c)^2 \cdot (c,a)^2}{(a,b,c)^2 \cdot (a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)} = \frac{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)}{(a,b,c)^2} .$$

JWR

GRY (11)

Oto dalsze własności sumy gier, prowadzące do pojęcia gier równoważnych.

Podstawowe znaczenie ma obserwacja, że dla dowolnej gry G w grze $G \oplus G$ wygrywa drugi gracz. Łatwo bowiem podać jego strategię postępowania. Wystarczy, aby kopiował on ruchy gracza rozpoczynającego. Na czym polega to kopiowanie? Otóż gra $G \oplus G$ w pozycji wyjściowej składa się z dwóch egzemplarzy tej samej gry. Pierwszy gracz wybiera jeden z tych egzemplarzy, a następnie wykonuje na nim legalny ruch. Gracz drugi wykonuje ten sam ruch na pozostałym egzemplarzu. Znowu pierwszy gracz ma wykonać ruch, i znowu bieżąca pozycja jest sumą dwóch egzemplarzy tej samej gry. W ten sposób gracz drugi zawsze będzie miał odpowiedź na ruch gracza pierwszego. A ponieważ gra zakończyć się musi, przegra gracz pierwszy. Prześledź to, Drogi Czytelniku, na przykładzie gry *Nim* z dwoma stosami równej liczności. A w wolnym czasie obejrzyj film *Mistrz zawsze traci* z cyklu *Parada oszustów*.

Z kolei przyjrzyjmy się równości $0 \oplus G = G \oplus 0 = G$. Dodanie gry 0 (końcówki) jest niezauważalne, bo nie stwarza żadnej dodatkowej możliwości ruchu. Powstaje jednak pytanie, jakie gry można dodać bez wpływu na ostateczny wynik rozgrywki. Okazuje się, że jest tak dla gier, w których drugi gracz wygrywa. Niech bowiem H będzie grą o strategii wygrywającej dla drugiego gracza. Posadźmy dwóch graczy do gry $G \oplus H$. Co się wówczas stanie? Jeden z graczy zorientuje się, że ma strategię wygrywającą w grze G. Powie sobie: *Chcę grać tylko w grę G*. Jednak jego przeciwnik ma pełne prawo wykonać ruch także w grze H. Strategia wygrywająca w grze $G \oplus H$ dla gracza mającego strategię wygrywającą w grze G jest następująca: grać w grę G zgodnie z regułami strategii wygrywającej w tej grze. Jeśli jednak przeciwnik wykona ruch w grze H, to natychmiast na ten ruch odpowiedzieć. Wnikliwy Czytelnik dostrzeże, że jakkolwiek obecność gry H zmienia przebieg rozgrywki, to nie wpłynie na jej ostateczny wynik.

Ponieważ interesuje nas nie tyle sam przebieg gier, co ich ostateczny wynik, uzasadnione staje się pisanie $H \equiv 0$ dla gier H o strategii wygrywającej dla drugiego gracza.

Będziemy także pisać $G \equiv H$ dla dowolnych takich gier G i H, że $G \oplus H \equiv 0$.

Nie będziemy podawać formalnie własności relacji równoważności gier, powiemy tylko, że gry równoważne we wszystkich rozważanych przez nas okolicznościach można utożsamiać.

Czytelnik zechce sprawdzić, że prawdziwe są równoważności $\{1\} \equiv 0$ oraz $\{1, \{1\}, 2\} \equiv 3$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl