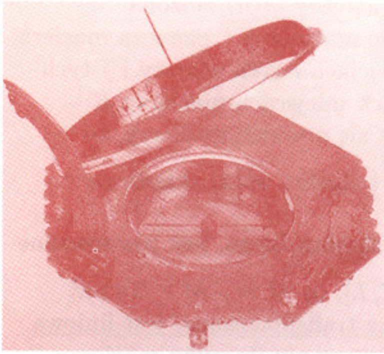


Zegar słoneczny równikowy, Niemcy, XVIII w.

Co ma wspólnego tożsamość Jacobiego z przecinaniem się wysokości trójkąta?

Henryk ŻOŁĄDEK

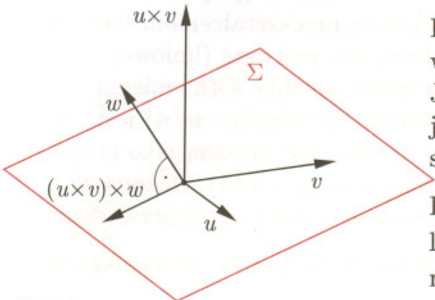
1. Zadanie Arnolda

V.I. Arnold w swoim artykule o nauczaniu matematyki napisał takie zdanie:

> *Tożsamość Jacobiego (powodująca, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie) – to fakt doświadczalny, tak samo jak to, że Ziemia jest okrągła (tzn. homeomorficzna z kulą).*

Stanowiło ono pewne (świadome) wyzwanie autora dla innych matematyków. W Warszawie niektórzy o nim dyskutowali. Ja sam usiłowałem zadanie powiązania tożsamości Jacobiego z wysokościami trójkąta rozpropagować. Niestety, nie usłyszałem do tej pory zadowalającego objaśnienia tego związku. Pozwolę sobie zatem zaprezentować własne rozwiązanie; myślę, że Arnold takie właśnie miał na myśli.

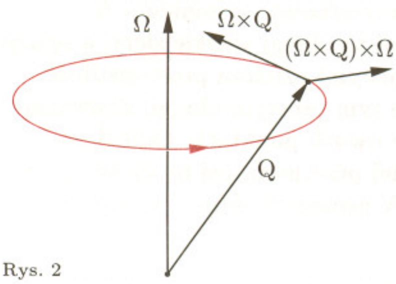
2. Podwójny iloczyn wektorowy



Rys. 1

Przypomnijmy, że iloczyn wektorowy $\vec{u} \times \vec{v}$ w przestrzeni trójwymiarowej jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej: kręcąc $\vec{u}$ w kierunku $\vec{v}$, posuwamy się wzdłuż $\vec{u} \times \vec{v}$.

Bezpośrednio z definicji iloczynu wektorowego wynika, że wektor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ leży w płaszczyźnie Σ wyznaczonej przez $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i jest prostopadły do $\vec{w}$ (patrz rysunek 1). Gdy $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe lub $\vec{w} \perp \Sigma$, to $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = 0$.



Rys. 2

Przykład: siła odśrodkowa działająca na punkt materialny o masie m, który leży w ciele sztywnym zaczepionym w punkcie O i obracającym się ze stałą prędkością kątową $\vec{\Omega}$, wynosi $m(\vec{\Omega} \times \vec{Q}) \times \vec{\Omega}$, gdzie $\vec{Q}$ jest wektorem położenia punktu materialnego względem O (patrz rysunek 2).

Tożsamość Jacobiego, która ma zastosowanie w zagadnieniu wysokości trójkąta, to następująca relacja spełniana przez iloczyn wektorowy

$$(*) \qquad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = 0$$

lub krócej: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ + cykliczna permutacja $= 0$. Proponujemy, aby Czytelnik sprawdził ją samodzielnie na jakimś przykładzie (biorąc np. $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ w różnych kombinacjach).

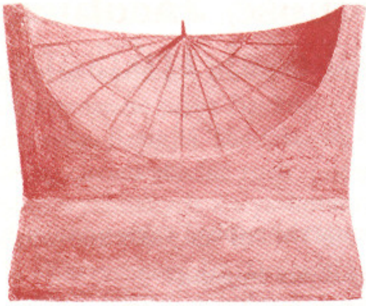
3. Algebry Liego

Zegar słoneczny z armatką strzelającą w południe, Francja, XVIII wiek.

Tożsamość $(*)$ jest szczególnym przypadkiem ogólnej tożsamości Jacobiego: $[[a,b],c]$ + cykliczna permutacja $= 0$, którą spełnia *komutator* $[\cdot,\cdot]$ w algebrze Liego. *Algebra Liego* $\mathcal{A}$ jest to przestrzeń wektorowa wyposażona w dodatkową (poza dodawaniem wektorów i mnożeniem ich przez skalary) operację $(a,b) \mapsto [a,b]$ (która jest liniowa ze względu na a i na b z osobna, zmienia znak przy zamianie kolejności a i b oraz spełnia tożsamość Jacobiego).

Przykładem algebry Liego jest algebra $\mathcal{A} = gl(n)$ macierzy $n \times n$ z komutatorem $[K,L] = KL - LK$. Tutaj tożsamość Jacobiego jest dosyć oczywista:

$$\begin{aligned}[][K,L],M] + \text{cykl. permut.} = {} & \big[(KLM - LKM) - (MKL - MLK)\big] + \\ & + \big[(LMK - MLK) - (KLM - KML)\big] + \\ & + \big[(MKL - KML) - (LMK - LKM)\big] = 0.\end{aligned}$$



Rzymski zegar słoneczny, III wiek p.n.e.

Innym przykładem jest podalgebra $\mathcal{A}' = so(n)$ algebry $gl(n)$ złożona z macierzy antysymetrycznych $K = -K^\top$, gdzie macierz $K^\top$ oznacza macierz transponowaną macierzy K; tzn. jeśli na przecięciach i-tych wierszy i j-tych kolumn w K stały liczby k_{ij}, to na odpowiednich miejscach macierzy $K^\top$ stoją liczby k_{ji}; zatem nasza podalgebra składa się z takich macierzy, że $k_{ij} = -k_{ji}$. Na przykład, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ i algebra $so(2)$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. To, iż $so(n)$ jest algebrą Liego, jest równoważne faktowi, że jeśli $K = -K^\top$, $L = -L^\top$, $M = [K, L]$, to $M = -M^\top$. To zaś wynika z tego, że operacja przejścia do macierzy transponowanej jest liniowa, $(K \pm L)^\top = K^\top \pm L^\top$, i z tego, że przy transponowaniu iloczynu macierzy trzeba zmienić kolejność macierzy transponowanych, $(KL)^\top = L^\top K^\top$. Mamy zatem $M^\top = (KL - LK)^\top = L^\top K^\top - K^\top L^\top = LK - KL = -[K, L] = -M$.

Każda algebra Liego skończonego wymiaru jest podalgebrą algebry macierzy $gl(n)$ dla pewnego n. (Okazuje się, na przykład, że algebra $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest tożsama z $so(3)$.) Ta własność sprawia, że teoria algebr Liego stanowi ważny dział matematyki.

Algebry Liego są związane z grupami Liego, tzn. z ciągłymi grupami przekształceń. Elementy algebry Liego odpowiadają przekształceniom bardzo bliskim przekształceniu tożsamościowemu; mierzą one pierwsze (liniowe) odchylenie od tożsamości. W szczególności elementy algebry $so(n)$ mierzą małe obroty w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i algebra $so(n)$ jest stowarzyszona ze *specjalną ortogonalną grupą* $SO(n)$, definiowaną jako grupa obrotów $\mathbb{R}^n$. Algebra $gl(n)$ jest związana z *grupą liniową* $GL(n)$, złożoną ze wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń liniowych tej przestrzeni.

Niestety, nie możemy podać więcej szczegółów tej teorii, ponieważ wymaga to zaawansowanej znajomości algebry i analizy.

Rozwiązanie zadania M 911.
Wybierzmy układ współrzędnych tak, by jego osie były jednocześnie osiami parabol. Równania parabol mają w nim postać

$$x = ay^2 + b \quad \text{i} \quad y = cx^2 + d.$$

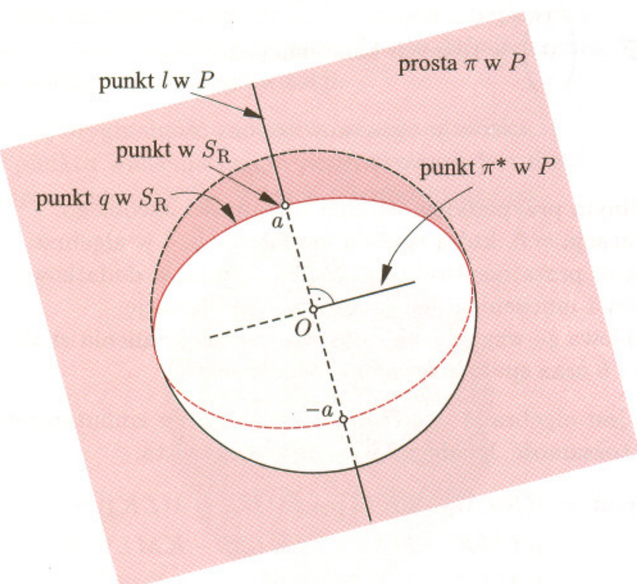
Zmieniając orientację osi można doprowadzić do sytuacji, gdy $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d < 0$. Współrzędne (x, y) punktu przecięcia parabol spełniają układ równań $x = ay^2 + b$, $y = cx^2 + d$. Dzieląc obie strony pierwszego równania przez a, drugiego przez c, a następnie dodając te równania stronami, otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}.$$

Jest to równanie okręgu o środku $\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2c}\right)$ i promieniu $\sqrt{\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$.

4. Geometria sferyczna

Modelem *geometrii sferycznej* jest sfera S_R w przestrzeni o promieniu R o środku w punkcie O. Prostymi w tej geometrii są okręgi wielkie sfery, a relacja ortogonalności (tzn. prostopadłości) między prostymi oznacza prostopadłość płaszczyzn wyznaczonych przez odpowiadające tym prostym okręgi. Zauważmy, że dwie różne proste sferyczne przecinają się w dwóch punktach. Odległość punktów jest mierzona wzdłuż prostej sferycznej przechodzącej przez nie; przy tym należy wybierać krótszy z dwóch łuków. W geometrii sferycznej krzywizna przestrzeni jest stała, dodatnia i równa R^{-2}.



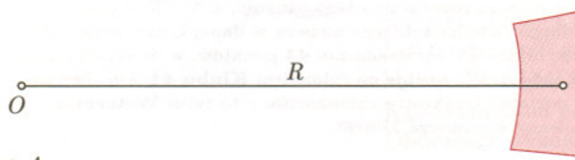
Rys. 3

Z geometrią sferyczną można związać następującą przestrzeń P. Jej „punktami” są proste przechodzące przez środek O sfery S_R. Tak więc, każdemu punktowi sfery można przypisać jeden „punkt” przestrzeni P – prostą przechodzącą przez ten punkt. (Zauważmy, że jednemu „punktowi” z P odpowiadają dokładnie dwa punkty z S_R, drugi leży po przeciwnej stronie.)

„Prostymi” w P będą płaszczyzny przechodzące przez O. „Punkt” x leży w „prostej”, jeśli odpowiadająca mu prosta leży w odpowiedniej płaszczyźnie. Jednej „prostej” w P odpowiada dokładnie jedna prosta w S_R. Pojęcie prostopadłości „prostych” jest tutaj oczywiste. Dwie różne „proste” przecinają się w dokładnie jednym „punkcie”.

Geometria przestrzeni P nazywana jest czasami *modelem rzutowym geometrii eliptycznej*; S_R zaś jest *modelem sferycznym geometrii eliptycznej*. Istnieje odwzorowanie z modelu sferycznego do modelu rzutowego. W modelu rzutowym nie będziemy mówić o krzywiźnie, bo nie wprowadziliśmy tam metryki (tzn. odległości między „punktami").

Użycie modelu rzutowego geometrii eliptycznej pozwala na wykazanie, że takie własności geometrii sferycznej jak prostopadłość prostych sferycznych oraz incydencja punktu a i prostej q (tzn. $a \in q$) nie zależą od R, czyli od krzywizny przestrzeni S_R. W szczególności własność przecinania się (lub nieprzecinania) wysokości trójkąta sferycznego nie zależy od R.



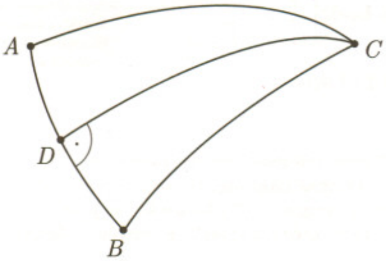
Rys. 4

Zauważmy teraz, że płaska geometria euklidesowa $E = \mathbb{R}^2$ jest granicą przy $R \to \infty$ (czyli przy krzywiźnie dążącej do zera) geometrii sferycznej przestrzeni S_R (rys. 4).

Zatem własność przecinania się wysokości trójkąta euklidesowego jest konsekwencją analogicznej własności w S_R i w P. Naszym celem będzie teraz powiązanie tożsamości Jacobiego z przecinaniem się wysokości w trójkącie w modelu rzutowym geometrii eliptycznej.

5. Dualność w geometrii eliptycznej

Weźmy model rzutowy P geometrii eliptycznej. Każdemu „punktowi" w P (czyli prostej k w przestrzeni, przechodzącej przez O) przyporządkowujemy „prostą" odpowiadającą płaszczyźnie Σ (oznaczymy ją k^*) prostopadłej do prostej k. Analogicznie „prostej" (czyli płaszczyźnie Π przechodzącej przez O) odpowiada „punkt" – prosta $l(= \Pi^*)$ prostopadła do płaszczyzny Π. To odwzorowanie nazywa się *dualnością*.



Rys. 5

Dualność zachowuje relację incydencji (jeśli $l \in \Sigma$, to $\Sigma^* \in l^*$) oraz relację prostopadłości prostych i płaszczyzn. Płaszczyzny Π i Σ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich dualne proste Π^* i Σ^* są prostopadłe.

Własność przecinania się trzech płaszczyzn wzdłuż jednej prostej oznacza, że dualne proste leżą w jednej płaszczyźnie.

W szczególności, jeśli proste a, b, c są prostymi dualnymi do płaszczyzn przechodzących przez boki BC, AC, AB trójkąta sferycznego ABC (rys. 5), to wysokości CD (z wierzchołka C na bok AB) odpowiada prosta d leżąca w płaszczyźnie wyznaczonej przez a i b oraz prostopadła do prostej c.

6. Rozwiązanie zadania Arnolda

Niech (jak w punkcie 5) a, b, c będą prostymi w przestrzeni dualnymi do płaszczyzn przechodzących przez łuki BC, AC, AB trójkąta sferycznego ABC. Wybierzmy niezerowe wektory $\vec{u} \in a$, $\vec{v} \in b$, $\vec{w} \in c$.

Wektor $\vec{x} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ wyznacza prostą d, odpowiadającą wysokości CD. Podobnie wektory $\vec{y} = (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$ i $\vec{z} = (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v}$ wyznaczają pozostałe proste e i f odpowiadające pozostałym dwóm wysokościom trójkąta.

Tożsamość Jacobiego oznacza, że $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 0$. Zatem wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ leżą w jednej płaszczyźnie Π. Ta płaszczyzna zawiera proste d, e, f. Dualna prosta Π^* odpowiada punktowi przecięcia się wysokości trójkąta ABC.

Literatura

V.I. Arnold, *O prepodavanii matematiki*, Uspechi Matem. Nauk **53** No 1 (1998), 229–234 (po rosyjsku).

Wydaje się, że granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ można elegancko obliczyć, stosując regułę de l'Hospitala. Obliczenie to jest jednak równie eleganckie, co pozbawione sensu, gdyż aby wiedzieć, ile wynosi pochodna $\sin x$, trzeba znać wartość granicy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$...

Kolejność wykonywania jednokładności i obrotu na płaszczyźnie nie ma wpływu na wynik dokładnie wtedy, gdy mają one ten sam środek. W przestrzeni odpowiedni warunek orzeka, iż środek jednokładności leży na osi obrotu.

Paul R. Halmos długo wahał się, co wybrać: matematykę czy filozofię? Kiedy jednak nie zdał egzaminu magisterskiego z filozofii, przestał mieć wątpliwości. Matematyka okazała się właściwą dziedziną: wkrótce w hierarchii naukowej Halmos wyprzedził swego egzaminatora. Okazuje się więc, że są egzaminy, które warto oblać...