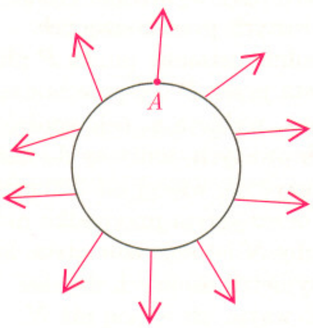
# Indeks odkrywa niewidzialne

*Witold SADOWSKI*

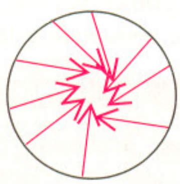
Kiedy w *Mistrzu i Małgorzacie* Bułhakowa Asasello prezentuje swój talent strzelecki, Małgorzata dowiaduje się, iż potrafi on trafiać w dowolną komorę i dowolny przedsionek serca przeciwnika.
– *Ależ tego nie widać* – dziwi się Małgorzata.
– *Właśnie o to chodzi, że nie widać* – odpowiada jej Korowiow –*Trafić w to, co widać, każdy potrafi.*




Rys. 1

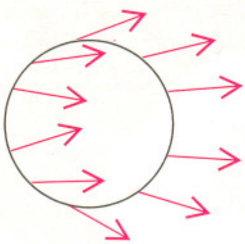
Być może, żeby strzelać do tego, czego nie widać, konieczne są diabelskie sztuczki. Nie są one jednak potrzebne, by poznać pewne własności ukrytych przedmiotów. Często wystarczy uważna obserwacja ich otoczenia i odrobina sprytu.

Przypuśćmy np., że jesteśmy nad brzegiem jakiegoś zbiornika wodnego, w którym znajdują się ujścia i źródła wody. Pewien fragment bajorka zasłania nam jakaś przeszkoda, a my chcemy się dowiedzieć, czy zasłonięte miejsce kryje w sobie źródło, czy ujście. Nietrudno wymyśleć, że wystarczy przyjrzeć się uważnie np. pewnemu okręgowi otaczającemu zakryte miejsce. Jeśli ruch wody obrazuje rysunek 1, to spodziewamy się źródła, jeśli rysunek 2, to ujścia. Gdyby natomiast najbardziej odpowiadał prawdzie rysunek 3, to moglibyśmy podejrzewać, że w środku nie ma ani ujścia, ani źródła (lub może, że występuje i jedno, i drugie).



Rys. 2

Zwolennicy pewnego formalizmu i bardziej ścisłego podejścia do zagadnień spływu i wypływu czują się może nieco zaniepokojeni rozważaniami, w których wiele zależy od naszego „widzi-nam-się”. Specjalnie dla nich wprowadźmy kilka użytecznych pojęć. Powiedzmy, że powierzchnię bajorka opisuje płaszczyzna. Każdemu jej punktowi przypisujemy wektor – prędkość przepływu („poziomego”) wody w tym punkcie. W ten sposób na płaszczyźnie zostaje określone **pole wektorowe**. Taka płaszczyzna z wektorami przypomina nieco sierść psa. Zakładając, że przepływ wody jest dość regularny, możemy uważać, iż sierść ta jest gładko uczesana. Zdarzają się jednak na niej miejsca, w których pojawia się łysinka – są to, oczywiście, punkty reprezentujące źródła bądź ujścia (np. ze źródła woda rozpływa się na wszystkie strony, więc dokładnie w punkcie źródła wektor prędkości „poziomej” jest zerowy). Wszystkie łysinki, czyli te punkty, którym przypisany został wektor zerowy, nazywamy **punktami osobliwymi** pola wektorowego.



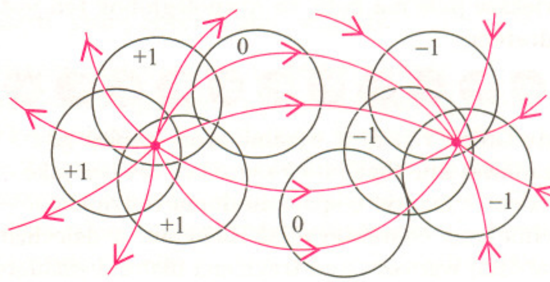
Rys. 3

Do badania punktów osobliwych wykorzystaliśmy wcześniej otaczający je okrąg. Spójrzmy jeszcze raz na rysunek 1. Jeżeli wyruszymy z punktu $A$, poruszając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zobaczymy, że wektor pola początkowo wskazujący „północ”, zacznie pokazywać „zachód”, potem „południe”, „wschód”, aż wreszcie – po przejściu całego okręgu – znów pokaże „północ”. W ten sposób podczas pełnego obiegu okręgu wektor pola wykonał pełen obrót w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Nietrudno spostrzec, że w analogicznej sytuacji wektor pola na rysunku 2 również wykona jeden obrót, ale w przeciwną stronę. Natomiast wektor pola z rysunku 3 nie wykona żadnego obrotu.

Liczbę obrotów wektora pola przy obiegu okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara nazywamy **indeksem** tego okręgu. (W przypadku, gdy wektor pola obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, liczbę obrotów bierzemy ze znakiem minus.)

Widzimy zatem, że indeksy okręgów z rysunków 1, 2, 3 wynoszą odpowiednio: 1, $-1$, 0.

Jasne jest, że indeks okręgu musi być liczbą całkowitą (po pełnym obiegu okręgu końcowe położenie wektora pola jest przecież takie samo, jak wyjściowe). Wynika stąd, że nawet przy ciągłych zmianach położenia oraz promienia okręgu bądź też sposobu „uczesania” pola wektorowego zmiana indeksu albo wcale się nie dokonuje, albo dokonuje się skokowo (z jednej liczby całkowitej na drugą). Oczywiście, taka „nagła” zmiana




Rys.4

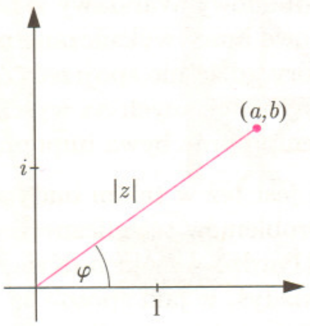
indeksu nastąpić może tylko w „dramatycznych” okolicznościach, tzn. gdy na okręgu pojawi się jakiś punkt osobliwy (rys. 4). O ile zadbamy, aby do tego nie doszło, to przy ciągłych deformacjach bądź okręgu, bądź pola, indeks pozostanie taki sam.

Zauważmy też, że jeżeli w gładko uczesanym polu wektorowym indeks pewnego okręgu jest różny od zera, to we wnętrzu tego okręgu musi znajdować się punkt osobliwy. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest. Ściskajmy okrąg tak, by jego promień malał do zera. Skoro założyliśmy, że wewnątrz nie ma punktów osobliwych, to indeks okręgu przez cały czas będzie taki, jak na początku, tj. różny od zera. Oznacza to, że na dowolnie małym okręgu wektor pola wykonuje pełne obroty. Jeżeli więc w środku okręgu wektory pola nie są „przystrzyżone” i nie pojawia się nigdzie wektor zerowy, to pole musi być „rozczochrane”, a nie gładko „uczesane”, jak zakładaliśmy.

Spróbujmy teraz wykorzystać nasze spostrzeżenia w ... teorii liczb zespolonych.

Przypomnijmy, że liczba zespolona to liczba postaci $z = a + ib$, gdzie $a$ oraz $b$ to liczby rzeczywiste, a $i^2 = -1$. Liczbę zespoloną możemy przedstawić jako punkt bądź wektor na płaszczyźnie. Długość tego wektora nazywamy **modułem** liczby $z$ i oznaczamy $|z|$. Kąt, jaki ten wektor tworzy z osią $OX$, nazywamy argumentem liczby $z$. Ponieważ $a = |z|\cos\varphi$, a $b = |z|\sin\varphi$, więc

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$




W tej postaci liczby zespolone bardzo łatwo się mnoży. Jeśli argumentem $z_1$ jest $\varphi$, a argumentem $z_2$ jest $\psi$, to

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= |z_1||z_2|((\cos\varphi\cos\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)).$$

Po skorzystaniu z faktu, że $i^2 = -1$ oraz ze wzorów na kosinus i sinus sumy kątów, uzyskujemy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\right].$$

W szczególności dla liczby naturalnej $n$ zachodzi elegancki wzór de Moivre'a:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Weźmy dowolny punkt na płaszczyźnie. Jeśli ma on współrzędne $(a, b)$, to odpowiada on liczbie zespolonej $z = a + ib$. Niech $f$ będzie pewnym wielomianem zmiennej $z$

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

gdzie $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ to liczby zespolone. Oczywiście, $f(z)$ jest pewną liczbą zespoloną, powiedzmy $f(z) = c + id$. Możemy teraz punktowi $(a, b)$ przypisać wektor $[c, d]$. Postępując tak dla każdego punktu, określamy na płaszczyźnie pole wektorowe. W szczególnym przypadku mamy wielomian

$$g(z) = z.$$

Każdemu punktowi przypisany zostaje wektor $[a, b]$ i pole wygląda podobnie, jak na rysunku 1. W punkcie $(0, 0)$ mamy punkt osobliwy, natomiast indeks każdego okręgu, w którego wnętrzu leży punkt $(0, 0)$, wynosi 1. Inny przypadek otrzymujemy, gdy rozpatrzymy wielomian

$$h(z) = z^n, \quad \text{dla} \;\; n > 1.$$

I tym razem łatwo stwierdzić, że w punkcie $(0, 0)$ mamy „łysinkę”, natomiast indeks dowolnego okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ wynosi $n$. (Zachęcam Czytelnika, by to sprawdził, korzystając ze wzoru de Moivre'a).

Powstaje pytanie, jak wygląda sytuacja w przypadku ogólnym. Czy zawsze w polu wektorowym, określonym przez wielomian o współczynnikach zespolonych, pojawia się „łysinka”? Innymi słowy, czy dla dowolnych współczynników $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ istnieje takie $z$, że

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0?$$

Odpowiedź na to pytanie nie wydaje się łatwa, gdyż w ogólności nie da się takich $z$ wyliczyć ze współczynników równania. Jak zatem stwierdzić, że istnieje coś, czego „nie widzimy”?

Spróbujmy wykorzystać nasze poprzednie sztuczki. Weźmy okrąg $O$ o środku w punkcie $(0, 0)$ i bardzo dużym promieniu $R$ tak, by ewentualne punkty osobliwe znajdowały się wewnątrz niego.

Możemy to zrobić biorąc, na przykład, $R > |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + 1$, gdyż wtedy dla $|z| \geq R$ jest $|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|$, z której to nierówności wynika, iż $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \neq 0$.

Zmieńmy teraz „uczesanie” pola wektorowego tak, by w chwili $t$ było ono określone przez wielomian

$$f_t(z) = z^n + (1 - t)(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0).$$

W chwili $t = 0$ pole wektorowe określone jest przez wyjściowy wielomian, w chwili zaś $t = 1$ przez wielomian $z^n$. W czasie „przeczesywania” pola żaden punkt osobliwy nie pojawia się na okręgu $O$, dla każdego $t \in (0; 1)$ oraz $|z| \geq R$ mamy bowiem

$$|z^n| > |1 - t||a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0|.$$

A zatem indeks okręgu $O$ jest taki sam w chwili $t = 0$, jak w chwili $t = 1$. Skoro w końcowym momencie wynosił $n$, więc również na początku wynosił $n$. Skoro zaś na początku wynosił $n$, więc był różny od zera i okrąg $O$ musiał kryć w sobie „łysinkę”.

Udowodniliśmy zatem, że dla dowolnych współczynników zespolonych wielomian

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad n \geq 1,$$

ma miejsce zerowe. Wynika stąd natychmiast, że każdy wielomian niezerowego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek. Jest to **podstawowe twierdzenie algebry**.