Losowe prognozy pogody

Bolesław KOPOCIŃSKI

Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności wymaga prognozowania zdarzeń. Praktyka krótkoterminowych prognoz pogody w naszym klimacie pokazuje, że to zadanie nie jest trudne. Hugo Steinhaus (1887–1972), matematyk lwowski i wrocławski, znawca problemów świata zewnętrznego, proponował dla Wrocławia następującą prognozę: jutro będzie taka sama pogoda jak dzisiaj. Nieco dla przekory sprawdzimy tę prognozę dla Phoenix w USA (J.E. Freud, *Podstawy nowoczesnej statystyki*, PWE, Warszawa 1971). Zapisywano tam zachmurzenie nieba w procentach. Dzień uznajemy za: słoneczny, o zachmurzeniu zerowym (Z, 0–5% zachmurzenia), średnim (S, 6–49%) lub dużym (D, 50–100%). Stan zachmurzenia następnego dnia oznaczmy odpowiednio przez Z^*, S^* i D^*. Tabela pokazuje następstwo pogody zaobserwowane w 61 dniach lata 1964 roku.

		Pogoda jutro			
		Z^*	S^*	D^*	Razem
Pogoda dziś	Z	19	5	4	28
	S	6	2	6	14
	D	2	7	9	18

Częstościowe oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń Z, S, D są więc następujące: $P(Z)=\frac{28}{60}$, $P(S)=\frac{14}{60}$, $P(D)=\frac{18}{60}$. Wiersze tabeli pozwalają obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(Z^*|Z)=\frac{19}{28},\quad P(S^*|Z)=\frac{5}{28},\quad P(D^*|Z)=\frac{4}{28},$$
$$P(Z^*|S)=\frac{6}{14},\quad P(S^*|S)=\frac{2}{14},\quad P(D^*|S)=\frac{6}{14},$$
$$P(Z^*|D)=\frac{2}{18},\quad P(S^*|D)=\frac{7}{18},\quad P(D^*|D)=\frac{9}{18},$$

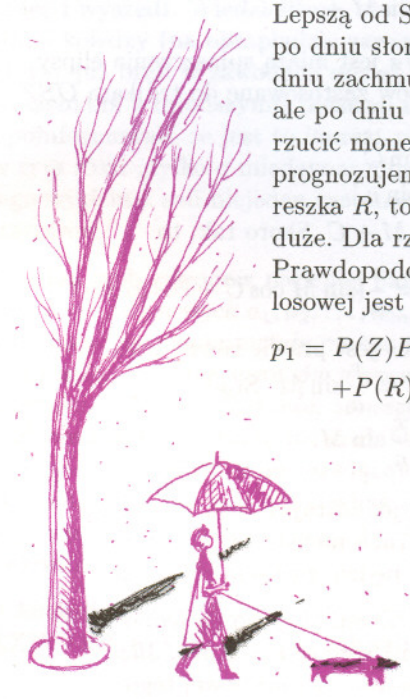
Prawdopodobieństwo trafności prognozy Steinhausa wynosi

$$p=P(Z)P(Z^*|Z)+P(S)P(S^*|S)+P(D)P(D^*|D)=0{,}5.$$

Lepszą od Steinhausowej jest prognoza losowa: po dniu słonecznym jest dzień słoneczny, po dniu zachmurzonym jest dzień zachmurzony, ale po dniu średnio zachmurzonym należy rzucić monetą: jeśli wypadnie orzeł O, to prognozujemy dzień słoneczny, jeśli zaś reszka R, to prognozujemy zachmurzenie duże. Dla rzetelnej monety $P(O)=P(R)=\frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo trafności prognozy losowej jest więc równe

$$p_1=P(Z)P(Z^*|Z)+P(S)[P(O)P(Z^*|S)+ +P(R)P(D^*|S)]+P(D)P(D^*|D)=0{,}57.$$

Można proponować także inne prognozy, równie dobre; zauważmy jednak, że orzeczenia prognozy losowej, wielokrotnie powtarzane, najlepiej oddają prawdziwy rozkład zachmurzenia w Phoenix.



Podstawy matematyki w wieku XX

3. Logika i obliczalność

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Poprzednie części artykułu ukazały się w *Deltach*: 9/1999 i 11/1999.

Przejdźmy teraz do omówienia logiki i teorii modeli. Rozwój logiki matematycznej wymagał sprecyzowania przedmiotu logiki. Na początku XX wieku było ono nieco różne od dzisiejszego. Co prawda Frege wprowadził formalizm, który później został powszechnie przyjęty, ale sporo czasu zajęło wprowadzenie lepszej notacji! Whitehead i Russell, w książce „Principia Mathematica", której pierwszy tom ukazał się w roku 1910, spopularyzowali współczesny opis składni logiki, ale włączyli do niej część współczesnej teorii mnogości. Pierwszy naprawdę nowoczesny podręcznik logiki matematycznej, napisany przez Hilberta i Ackermanna, ukazał się w roku 1928. Zasadniczy problem, jakie to formuły są zawsze prawdziwe, przy założeniu jakiegoś zbioru formuł A, został rozstrzygnięty przez Gödla w jego pracy doktorskiej opublikowanej w roku 1930. Wykazał tam Gödel, że reguły dowodzenia, wskazane przez Fregego i spopularyzowane przez Whiteheada i Russella, są zupełne – to, co daje się dowieść za pomocą tych reguł z aksjomatyki A, to dokładnie zdania prawdziwe we wszystkich modelach aksjomatyki A. Własność tę nazywamy twierdzeniem o zupełności dla logiki pierwszego rzędu.

Streśćmy pokrótce dowód twierdzenia o zupełności (pochodzący od Henkina i nieco inny niż oryginalny dowód Gödla). Najpierw musimy wykazać, że cokolwiek jest dowodliwe (w systemie „Principia Matematica") z aksjomatyki A, jest prawdziwe we wszystkich modelach A. To wiedzieli już Whitehead i Russell. W drugą stronę rozumowanie jest trudniejsze – jeśli A nie dowodzi jakiejś formuły φ, to musimy skonstruować model, w którym A jest prawdziwa, ale φ nie jest. Model taki konstruujemy, dodając odpowiednie stałe i budując na nich interpretację spełniającą aksjomaty A oraz $\neg\varphi$. Na nowych stałych musimy definiować relacje tak, by aksjomaty A były spełnione, ale formuła φ nie. Korzystając z tego, że „nowe" stałe nie są wspomniane w A, rozszerzamy niesprzeczną teorię $A \cup \{\neg\varphi\}$ do teorii zupełnej T, mającej tę własność, iż ilekroć zdanie egzystencjalne $\exists x \psi(x)$ należy do T, to dla jakiejś stałej c, $\psi(c)$ należy do T. Taką konstrukcję musimy powtórzyć nieskończenie wiele razy, coraz to dodając nowe stałe. Ale każda formuła jest skończona i wobec tego, po owej iteracji wykonanej nieskończenie wiele razy, własność zupełności względem zbioru dodanych stałych będzie spełniona. Z tak skonstruowanego zbioru formuł już łatwo odczytać model, w którym A jest prawdziwe, ale φ nie. Na dodatek, jeśli język, z którego zaczynaliśmy konstrukcję, jest przeliczalny, to i model, jaki został skonstruowany, jest przeliczalny. Wynika stąd coś dziwnego, mianowicie że zbiór zdań prawdziwych arytmetyki liczb rzeczywistych (a nawet teorii mnogości!) ma modele przeliczalne. Pokazuje to, że logika „pierwszego rzędu" (dla której mamy własność zupełności) nie opisuje struktur nieskończonych w sposób jednoznaczny. Łatwo też zobaczyć, że arytmetyka Peano (w języku pierwszego rzędu) ma wiele nieizomorficznych modeli. Jeśli zezwolimy na pisanie zdań, w których będą kwantyfikatory przebiegające *podzbiory* zbioru liczb naturalnych, to „paradoks" nieizomorficznych struktur, spełniających arytmetykę Peano, znika, ale tylko pozornie. W każdym modelu teorii mnogości taka teoria ma jeden model, ma jednak inne, gdy zmieniamy model teorii mnogości.

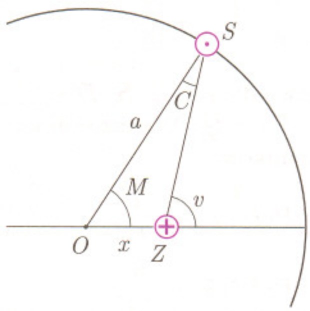
Drugi problem Hilberta dotyczył niesprzeczności arytmetyki Peano. Jak można by wykazać ową niesprzeczność? Intuicyjnie arytmetyka Peano jest niesprzeczna – aksjomaty dotyczące sumy i iloczynu sprawdza się „na palcach", a nawet schemat indukcji jest też oczywisty – każde dziecko wie, że jeśli ustawić kamienie domina pionowo, jeden za drugim i popchnąć, to wszystkie się przewrócą, nawet jeśli jest ich bardzo wiele. Jak można formalnie udowodnić, że żaden dowód nie wykaże równości $0 = 1$? Ale co to jest dowód?

Nieco uogólniając „drugi problem Hilberta", można pytać o niesprzeczność matematyki (nie tylko arytmetyki, ale teorii ZFC). W roku 1931 Gödel wykazał, że nie da się udowodnić niesprzeczności arytmetyki (ani teorii ZFC) w niej samej. Samo wyrażenie tej własności nie jest zupełnie proste. Zauważmy, że wewnątrz arytmetyki możemy efektywnie

Koło czy elipsa?

Tomasz KWAST

Planety, jako doskonałe obiekty położone na doskonałym nieboskłonie, musiały – według astronomów starożytnych – poruszać się też w sposób doskonały, czyli jednostajnie po okręgach. Jednak każdy zainteresowany widział, że obserwowany ruch planet nie jest tak doskonały. Pogodzić teorię z obserwacjami Starożytni próbowali na trzy sposoby. Anaksymander (około 610–550 p.n.e.), a później Eudoksos (408–355 p.n.e.), umieszczali planetę na jednostajnie obracającej się sferze, której oś osadzona była w innej sferze obracającej się wokół innej osi itd., aż ostatnia sfera obracała się w końcu wokół Ziemi. Hipparch (190–125 p.n.e.), a po nim Ptolemeusz (100–168 n.e.), robili coś podobnego, tyle że z okręgami. Umieszczali mianowicie planetę na okręgu (epicyklu), którego środek wędrował jednostajnie po innym okręgu itd., a w środku ostatniego okręgu (deferentu) znajdowała się Ziemia. Obie te procedury przypominają to, co obecnie nazwalibyśmy analizą fourierowską. Dzięki autorytetowi Ptolemeusza ten drugi opis zyskał, jak wiadomo, szczególną popularność i przez półtora tysiąca lat w ten właśnie sposób przedstawiano ruchy planet.



Ale Hipparch próbował chwytu jeszcze innego. Niech mianowicie przykładowo Słońce porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu a – skoro tak być musi – ale Ziemia, z której Słońce oglądamy, niech leży w niewielkiej odległości x od środka okręgu (rysunek). Tę odległość x należy tak dobrać, by wynikający z tego modelu niejednostajny ruch Słońca najlepiej zgadzał się z obserwowanym.

W trójkącie OSZ jednostajnie (z założenia) narasta kąt M, ale obserwator znajduje się w punkcie Z i może mierzyć np. kąt v między kierunkiem na Słońce a kierunkiem na jego „perygeum". Gdyby torem Słońca była elipsa, to zależność v od M we współczesnym zapisie miałaby przybliżoną postać

$$v = M + 2e \sin M + \ldots,$$

gdzie tzw. mimośród $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ jest miarą spłaszczenia elipsy o półosiach a i b. Twierdzenie sinusów zastosowane do trójkąta OSZ daje

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin C}{\sin v},$$

jak również zachodzi zależność $v = M + C$. Skoro tak, to

$$\sin C = \frac{x}{a} \sin v = \frac{x}{a} \sin(M + C) = \frac{x}{a}(\sin M \cos C + \cos M \sin C).$$

Ale kąt C jest mały, zatem jego sinus jest prawie równy zeru, a cosinus jedności, a więc $\sin C \approx C \approx \frac{x}{a} \sin M$. Stąd

$$v \approx M + \frac{x}{a} \sin M.$$

Tak więc w pierwszym przybliżeniu jednostajny ruch po okręgu będzie widoczny jako obserwowany ruch niejednostajny, gdy współczynnik przy $\sin M$, równy $\frac{x}{a}$, będzie zarazem równy $2e$.

Obecnie wiemy, że mimośród orbity Ziemi (lub, co na jedno wychodzi, orbity Słońca wokół Ziemi) wynosi $e = 0{,}016$. Już Hipparch znalazł niezłe przybliżenie wartości liczbowej tego współczynnika, choć, oczywiście, nie znał jego interpretacji geometrycznej. To dopiero dzięki Keplerowi wiemy, że niejednostajność ruchu Słońca względem Ziemi (lub odwrotnie) wynika z eliptyczności orbit. A pomysł Hipparcha nadal można wykorzystywać przy kreśleniu mało spłaszczonych elips. Na przykład schemat orbit wszystkich planet Układu Słonecznego można w dobrym przybliżeniu narysować cyrklem (bo ich spłaszczenia i tak się nie zauważy), byle tylko wbijać go nie w Słońce (czyli w ognisko), lecz odpowiednio trochę obok. Gdy promienie orbity mają po 10 cm, to (spośród widocznych planet) najdalej od Słońca będzie środek orbity Merkurego – 20,5 mm, najbliżej Wenus – 0,7 mm; dla Ziemi będzie to 1,7 mm.

Reminiscencje olimpijskie

Krzysztof CIESIELSKI

O Olimpiadzie Matematycznej słyszałem już jako uczeń szkoły podstawowej. W „Czytankach" – tak wówczas nazywały się podręczniki do języka polskiego – było (oparte na faktach) opowiadanie „A jednak matma" o Andrzeju, który wyprzedzając starszych kolegów, zajął w Olimpiadzie pierwsze miejsce.
Z zadaniami olimpijskimi zetknąłem się jednak dopiero jako uczeń II klasy liceum. Dostarczono nam kartkę z zadaniami I stopnia, my, młodzi, ambitni, uczniowie klasy o profilu matematycznym, zainteresowani matematyką, tłumnie rzuciliśmy się, by tematy przepisać i… Po raz pierwszy w życiu poczułem niesmak po przeczytaniu tematów zadań matematycznych. Na tym skończył się mój udział w XXIV OM.

***

Gdy byłem w III klasie, zadania okazały się dla mnie łatwiejsze. Rozwiązałem 10 z 12 i to pozwoliło mi znaleźć się wśród 117 uczestników zawodów II stopnia w okręgu krakowskim. To nie pomyłka, aż tyle osób wtedy zakwalifikowano! Punktualnie o 9^{00} podyktowano tematy, zaczęliśmy pisać… Po godzinie na sali powiało grozą, gdyż pewien chłopak w czerwonym swetrze z zadowoloną miną podszedł do stołu prezydialnego, oddał pracę i wyszedł. Wiedzieliśmy, kto to taki. Tuż przed zawodami starsi koledzy (na olimpiadzie zawsze znajdą się „bywalcy", którzy już brali w zawodach udział, wiele wiedzą i dzielą się wrażeniami z młodszymi) pokazali nam tego w czerwonym swetrze i poinformowali, że jest to laureat poprzedniej Olimpiady, który w tym roku „tylko o międzynarodowej olimpiadzie myśli". Po jego wyjściu z sali niejeden zastanawiał się, czy był w ogóle sens startować?

Z zadań tych zawodów najlepiej pamiętam ostatnie: *Dany jest ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ o własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.* Zadanie (którego zresztą nie zrobiłem) wywarło na mnie wrażenie ze względu na przepiękne rozwiązanie pokazane na „herbatce olimpijskiej". Należało mianowicie zauważyć, że jeśli ciąg $\{b_i\}$ ma wspomnianą własność, to ciągi $\{b_i + k\}$ oraz $\{k \cdot b_i\}$ też ją mają i rozważyć ciąg $\{a_i - a_1\}$…

A kolega, który oddał prace tak szybko, mimo że był laureatem XXIV OM, w XXV OM nie zakwalifikował się do finału.

***

ponumerować formuły języka arytmetyki. Mianowicie – formuła jest ciągiem symboli alfabetu języka arytmetyki. Numerujemy więc symbole języka. Potem patrzymy na ciągi skończone symboli. Niektóre są poprawnie zbudowanymi formułami, inne zaś nie. Przypiszmy teraz ciągowi liczb $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ odpowiadających kolejnym symbolom liczbę $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ (gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą), która będzie numerem całego ciągu. Łatwo rozpoznać, kiedy liczba m jest kodem formuły arytmetycznej. Następnie, względnie łatwo rozpoznać, czy liczba jest kodem dla aksjomatu arytmetyki (żmudne to, ale oczywiście możliwe). Dalej, możemy kodować ciągi formuł jako liczby, i znowu łatwo (acz żmudnie) można rozpoznać, czy dana liczba koduje poprawny dowód. Teraz możemy napisać zdanie arytmetyczne $Con(PA)$, które mówi: „z aksjomatyki Peano nie da się wywieść formuły $0 = 1$". Otóż Gödel wykazał, że o ile arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to $Con(PA)$ dowodu nie ma! Oczywiście, w teorii ZFC dowodzimy, że i negacja $(\neg Con(PA))$ dowodu w PA nie ma, bowiem PA ma model. W szczególności, arytmetyka Peano nie jest teorią zupełną. Twierdzenie to zachodzi w silniejszej jeszcze formie.

Mianowicie – żadne niesprzeczne rozszerzenie arytmetyki Peano o skończoną liczbę aksjomatów nie jest zupełne.
W licznych dziełach popularyzatorskich po dziś dzień pisze się o tym niezwykłym wyniku Gödla rzeczy wielce nieprawdziwe (na przykład takie, że Gödel wykazał, iż teorie zupełne nie istnieją).

Do czasu udowodnienia niezupełności arytmetyki (1931) wydawało się matematykom, że każdy problem dotyczący liczb naturalnych, a nawet każdy problem teorii mnogości da się rozwiązać na podstawie znanych już od jakiegoś czasu aksjomatów. Natomiast Gödel dowiódł, że pewne zdania arytmetyczne oraz ich negacje nie dadzą się udowodnić ani obalić, nawet w najsilniejszej znanej teorii, mianowicie teorii mnogości.

Oprócz zdania $Con(PA)$ znaleziono też różne własności teorioliczbowe albo kombinatoryczne niezależne od aksjomatyki Peano, w szczególności rozmaite uogólnienia twierdzenia Ramseya o kolorowaniu grafów. Dowody wielu z tych uogólnień wymagają metod analizy, a czasem i teorii mnogości. Co więcej, okazało się, że zdania takie wiążą się silnie z rozmaitymi aksjomatami „wielkich liczb kardynalnych". Badania Parisa, Solovaya i Friedmana dały wiele takich twierdzeń.

Logika, którą pokazaliśmy powyżej, zajmuje się opisem struktur badanych przez matematyków. Teoria takich struktur została rozwinięta przez Tarskiego i jego uczniów (na podstawie badań Schrödera, Skolema i innych). Jest to tzw. *teoria modeli*, która jest dużym działem matematyki, znajdującym się na pograniczu logiki, algebry i analizy.

Wszyscy pamiętamy, że Cauchy wprowadził ε-δ definicję ciągłości po to, by uniknąć używania liczb nieskończenie małych. Matematycy XVII i XVIII wieku używali wielkości nieskończenie małych bez zadowalających definicji tych pojęć. Korzystając z technik teoriomodelowych, A. Robinson wykazał w latach 60., że pojęcie nieskończenie małych można w pełni uściślić. Dziś istnieją podręczniki, w których rozwija się analizę, używając wielkości nieskończenie małych w całkowicie jasny sposób.

W praktyce matematycznej niemal zawsze używamy logik „wielosortowych" (jest to też istotne w informatyce). Logiki wielosortowe dają się zredukować do logiki pierwszego rzędu, a ta z kolei do prostszej jeszcze logiki równościowej Birkhoffa.

Przejdźmy teraz do zagadnień obliczalności. W trakcie dowodu twierdzenia o niezupełności arytmetyki, który opisaliśmy powyżej, Gödel rozważał klasę funkcji, które dziś nazywamy obliczalnymi (rekurencyjnymi). Nazwijmy zbiór liczb naturalnych obliczalnym, jeśli jego funkcja charakterystyczna jest obliczalna, a rekurencyjnie przeliczalnym, jeśli jest pusty lub jest zbiorem wartości jakiejś funkcji obliczalnej. Otóż Gödel wykazał, że zbiór (kodów) twierdzeń arytmetyki Peano jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest obliczalny. Dalszy krok w naszym zrozumieniu pojęcia obliczalności został postawiony przez Turinga, który wprowadził pojęcie maszyny (dziś nazywanej maszyną Turinga) i wykazał istnienie uniwersalnej takiej maszyny, tj. maszyny, która za pomocą odpowiednich parametrów jest w stanie symulować każdą maszynę. Wreszcie Kleene głęboko rozwinął teorię obliczalnych funkcji częściowych.

Maszyna Turinga operuje na *taśmie* podzielonej na *komórki* (komórki te ponumerowane są liczbami naturalnymi). Komórka taka może być pusta lub może być w niej 0 lub 1. Działanie maszyny jest opisane przez akcje jej *głowicy pisząco-czytającej*. Głowica ta znajduje się zawsze w jakimś *stanie* (ze skończonego

W Olimpiadzie nr XXVI postanowiłem nie przejmować się niczyimi mądrymi minami ani wcześniejszym oddawaniem prac przez innych. Metoda przyniosła skutek – w Krakowie zająłem drugie miejsce (oficjalnie tych wyników nie podawano, ale jakoś wszyscy zainteresowani o nich wiedzieli). W finale, niestety, potknąłem się na najprostszym zadaniu: *W rozwinięciu dziesiętnym pewnej liczby naturalnej występują cyfry 1, 3, 7 i 9. Udowodnić, że przez permutację cyfr tego rozwinięcia można otrzymać rozwinięcie dziesiętne liczby podzielnej przez 7* – otóż źle zrozumiałem temat. Sądziłem, że przez permutację cyfr rozwinięcia Autorzy mają na myśli zamianę – na przykład – każdej jedynki na czwórkę, czwórki na siódemkę... Według tego, co miałem na myśli, permutacją cyfr w liczbie 113479 byłoby np. 449712. Autorom chodziło natomiast o najzwyklejsze „pomieszanie" cyfr w liczbie; np. na 131947. Zmodyfikowanego zadania, znacznie trudniejszego od oryginalnego, nie zrobiłem. Cóż – mogłem podczas zawodów zapytać, o co chodzi. W efekcie skończyło się na wyróżnieniu, a zapewne mogło być lepiej.

***

Kiedy znalazłem się na I roku matematyki UJ, Olimpiada była częstym tematem moich rozmów z kolegami (w mojej grupie studenckiej było siedmiu finalistów!). Nic więc dziwnego, że w lutym kilku z nas wybrało się na tradycyjnie organizowaną „herbatkę olimpijską" po zakończeniu zawodów II stopnia. Jedno z zadań brzmiało: *Na płaszczyźnie umieszczono 6 punktów w ten sposób, że każde 3 spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.* Gdy prezentowano rozwiązania, przedstawiciel Komitetu Głównego powiedział, że to zadanie zostało pomyślane jako pewnego rodzaju kontynuacja zadania sprzed 10 lat: *Na płaszczyźnie obrano 6 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i wykreślono wszystkie odcinki łączące parami te punkty. Niektóre z odcinków wykreślono kolorem czerwonym, a inne niebieskim. Dowieść, że któreś trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o bokach jednego koloru.* Przedstawił rozwiązanie zadania sprzed lat, okazało się jednak, że ma kłopoty z przypomnieniem sobie, co dalej. Wówczas mnie przyszedł do głowy pomysł, jak to zrobić, podszedłem do tablicy i pokazałem (istotnie: wystarczy na czerwono pomalować te odcinki, dla których istnieje taki trójkąt o danych wierzchołkach, że nasz odcinek jest jego najdłuższym bokiem, na niebiesko pomalować pozostałe i zauważyć, że nie istnieje trójkąt o wszystkich bokach niebieskich...). Uczestnicy zawodów popatrzyli na mnie tak, jak my dwa lata wcześniej patrzyliśmy na kolegę w czerwonym sweterku. Na szczęście zaraz potem zostaliśmy z kolegami przedstawieni przez Przewodniczącego Komitetu Okręgowego jako studenci matematyki. Zawodnicy wyraźnie odetchnęli.

***

Gdy skończyłem studia, od razu zgłosiłem Edwardowi Tutajowi (który co prawda nie był przewodniczącym KO w Krakowie, ale to na nim spoczywał ciężar większości prac i on de facto rządził) akces do Komitetu Okręgowego Olimpiady. Przyjęto mnie i zacząłem poprawiać zadania...

Każdą pracę poprawiają dwie osoby. W trzecim roku mojego członkostwa w Komitecie zdarzyło mi się po raz pierwszy, że nie potrafiłem ocenić jednej z prac. Siedziałem nad nią kilka godzin, nie mogąc przebrnąć przez oznaczenia Autora (czasem nie zdefiniowane, chwilami niekonsekwentne) i nie rozumiejąc idei rozwiązania. W zasadzie mogłem sobie to darować, bo zadanie pochodziło z trzeciej serii zawodów I stopnia, a Autor pracy był już dwa razy w finale Olimpiady, zadania z pierwszej i drugiej serii zrobił, więc było oczywiste, że do II stopnia się zakwalifikuje. Niemniej jednak próbowałem rozszyfrować myśl Autora – bez efektu. Zastanawiało to o tyle, że wcześniejsze prace tego zawodnika były bardzo starannie redagowane. Nie oceniłem pracy, oddałem zmiennikowi, którym był Jurek Grzybowski, dwa lata młodszy ode mnie zdobywca I nagrody na Międzynarodowej Olimpiadzie. Jurkowi udało się zrozumieć rozwiązanie, stwierdził, że jest poprawne.

Zawodnik, o którym mowa, przyszedł potem do nas na studia (a kilka lat później włączyliśmy go do Komitetu). Przy nadarzającej się okazji wytknąłem mu, że nad ową pracą spędziłem spory kawałek nocy. Wówczas opowiedział mi, jak się rzecz miała. Gdy napisał rozwiązania III serii, dał prace swojemu koledze Tomkowi, również startującemu w Olimpiadzie i Tomek po przepisaniu rozwiązań miał prace ich obu wysłać. Tymczasem Tomek oryginalne prace zgubił; zawiadomił o tym Autora wieczorem 10 grudnia, trzy godziny przed terminem wysyłania prac. Nieszczęsny zawodnik musiał przez 3 godziny przypomnieć sobie rozwiązania, napisać i wysłać. Nic dziwnego, że praca wyglądała tak, jak wyglądała.

⋆⋆⋆

Zawody II stopnia XXXIII Olimpiady odbyły się w lutym 1982, dwa miesiące po wprowadzeniu stanu wojennego. DOM TURYSTY PTTK, gdzie zawsze kwaterowaliśmy zawodników zamiejscowych, został przekształcony w ZOMO – TOURIST; udało nam się jednak ulokować przyjezdnych gdzie indziej, z tym, że posiłki musieli jeść w restauracji oddalonej o dziesięć minut drogi piechotą od hotelu. Gdy przyjechali, udaliśmy się (zawodnicy i dwaj członkowie Komitetu jako obstawa) na kolację. Zawodnicy siedli przy stolikach i w tym momencie stwierdziliśmy, że nie mamy listy z ich nazwiskami; gdyby zaczepił nas w drodze powrotnej jakiś patrol, moglibyśmy mieć kłopoty. Mój kolega, o surowym i nieprzeniknionym wyrazie twarzy, elegancko ubrany – w marynarce i krawacie, podszedł więc do pierwszego ze stolików i do siedzących tam powiedział stanowczym tonem: *Wasze nazwiska?* Chłopcy zdrętwieli... Chwilkę trwało, zanim kolega zorientował się, że zażądał nazwisk nie od olimpijczyków, ale Bogu ducha winnych młodych ludzi.

⋆⋆⋆

W latach osiemdziesiątych mieliśmy w Krakowie spore kłopoty z sekretarzami Komitetu. Co kogoś udało się namówić na pełnienie tej funkcji, to wkrótce potem trzeba było szukać innej osoby. Zazwyczaj okazywało się, że ten z trudem znaleziony sekretarz do tej pracy się, niestety, nie nadaje. Z bardziej oryginalnych wyczynów naszych sekretarzy warta wspomnienia jest następująca historia. Liceum w Sanoku oraz X LO w Krakowie noszą imię Komisji Edukacji Narodowej. Wypisując zawiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów II stopnia, Pani Sekretarz zaadresowała (i wysłała) listy do liceów imienia Komisji Koedukacji Narodowej.

⋆⋆⋆

Są takie zadania, które wydają się bardzo proste, gdy się zna rozwiązanie. Gdy jednak trzeba to rozwiązanie wymyślić, może być gorzej... Kiedyś na zawodach II stopnia było zadanie: *Obliczyć kres dolny pól sześciokątów wypukłych, których wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite.* Nietrudno domyślić się, że wynikiem jest 3, ale jak to wykazać? Zadania nie zrobił nie tylko nikt z uczestników zawodów w Krakowie, ale także i żaden z członków Komitetu Okręgowego... Przedstawiciel Komitetu Głównego akurat na

zbioru stanów S). Poza tym głowica *wskazuje* na jakąś komórkę. Akcje głowicy są jednoznacznie wyznaczone przez *funkcję przejścia*. W zależności od stanu głowicy i od symbolu w komórce, na którą wskazuje głowica, głowica zmienia zapis w komórce, zmienia swój stan i przesuwa się w prawo lub w lewo. Jeden ze stanów jest wyróżniony – kiedy maszyna go osiąga – staje. Funkcja f z liczb naturalnych w liczby naturalne może być reprezentowana przez maszynę M w taki sposób. Dana wejściowa n zapisana jest przez kolejnych n jedynek. Maszyna liczy i staje, zapisując kolejnych $f(n)$ jedynek. Jeśli tak jest dla każdej liczby n z dziedziny funkcji f, to mówimy, że funkcja f jest reprezentowana przez maszynę M. Turing wykazał, że maszyny reprezentują dokładnie obliczalne funkcje częściowe.

Pojęcie maszyny Turinga lub funkcji obliczalnej o argumentach i wartościach całkowitych pozwala też zbudować adekwatną definicję funkcji obliczalnych o argumentach i wartościach rzeczywistych. Teorię taką rozwijali w latach międzywojennych Banach i Mazur. Okazuje się, że wszystkie funkcje obliczalne są ciągłe na swojej dziedzinie, ale dziedzina może być np. zbiorem liczb niewymiernych i funkcja może nie mieć ciągłego przedłużenia na żadną liczbę wymierną. Teoria Banacha i Mazura stanowi rozwiązanie dziewiętnastowiecznego problemu „czym są funkcje?". Z jednej strony mamy ścisłą teoriomnogościową ogólną definicję funkcji. Z drugiej strony mamy ścisłą definicję funkcji obliczalnych opartych na jasnych przepisach obliczania ich wartości.

Teoria obliczalności i, w szczególności, maszyny Turinga pojawiły się jako ogólne teoretyczne modele dobrze zdefiniowanych procedur obliczeniowych (czyli algorytmów). Niebawem elektronika poczyniła odpowiednie postępy i można było budować fizyczne maszyny Turinga. Do postępu przyczyniła się II wojna światowa, a następnie „zimna wojna". Trzeba było „łamać" niemiecki szyfr Enigma i maszyny to czyniące były pierwszymi komputerami (acz kandydatów do tego tytułu jest więcej). Następnie zaś potrzebne były maszyny obliczeniowe do budowania broni jądrowych i elektrowni atomowych. Po nadzwyczajnym sukcesie ogólnego pojęcia obliczalności zaczęto wprowadzać bardziej konkretne pojęcia, lepiej modelujące funkcje, które obliczane są na komputerach. W szczególności badano funkcje opisywane przez maszyny

Turinga, w których liczba kroków jest ograniczona przez jakiś wielomian względem rozmiaru danych wejściowych (klasa PTIME), a także klasę funkcji, w których rozmiar aktualnie używanej części taśmy jest ograniczony przez podobny wielomian (klasa PSPACE). Dziś PTIME stanowi najlepszą matematyczną definicję funkcji praktycznie obliczalnych. Klasy PTIME, PSPACE i pokrewne wiążą się z rozmaitymi aspektami definiowalności różnych zbiorów liczb naturalnych za pomocą efektywnych środków, a pytanie, czy dwie takie klasy (PTIME i NPTIME) są równe, jest jednym z podstawowych nierozwiązanych problemów podstaw matematyki. Pytanie, czy PTIME = NPTIME, ma bardzo wiele reprezentacji, w tym kombinatorycznych, teorioliczbowych i grafowych. W logice reprezentowane jest ono za pomocą „problemu spełnialności" – czy istnieje algorytm odpowiadający na pytanie, czy dana formuła φ rachunku zdań jest spełnialna – algorytm dający odpowiedź w czasie proporcjonalnym do wielomianu względem długości formuły φ.

W drugiej połowie XX wieku zastosowania w informatyce i, w szczególności, konieczność zbudowania solidnych podstaw informatyki były jednym z motywów rozwoju podstaw. Tak się bowiem składa, że badania informatyczne korzystają z wielu dziedzin matematyki i to nawet dziedzin dość abstrakcyjnych. Wystarczy choćby spojrzeć na związki teorii kategorii z programowaniem za pomocą obiektów (OOP).

Wróćmy teraz do 10. problemu Hilberta. Okazało się, że nie istnieje algorytm, który pozwala stwierdzić, które równania diofantyczne mają rozwiązania. Po wielu latach badań Davis, Putnam, Julia Robinson i Matijasewicz wykazali, że algorytmu takiego nie ma. Ich twierdzenie mówi nam, że już elementarna teoria liczb całkowitych jest bardzo głęboka i nie ma jednolitej metody rozwiązywania jej problemów.

Powróćmy na chwilę do ogólnych problemów podstaw matematyki. Praktyka matematyczna pokazuje, że matematyka jest nie tyle nauką, co sztuką, sztuką budowania teorii dedukcyjnych. Na przykład hipoteza Goldbacha jest dobrze potwierdzonym faktem empirycznym,

Hipoteza ta mówi, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

ale matematycy nie przyjmują jej do arsenału swoich aksjomatów, bo nie

zawody do Krakowa nie dojechał, nie wiedzieliśmy więc, jak sobie z zadaniem poradzić. Dopiero kilka dni później rozwiązał je w przepiękny sposób (jak się później okazało, takie było też rozwiązanie KG) student matematyki UJ, który notabene w latach szkolnych startował w Olimpiadzie, ale bez powodzenia. By rozstrzygnąć problem, wystarczy zauważyć, że w wielokącie musi być jeszcze jakiś punkt o obu współrzędnych całkowitych (co zrobiliśmy) i że wielokąt realizujący szukany kres dolny musi mieć taki punkt wewnątrz (czego już nie udowodniliśmy).

⋆⋆⋆

Podczas poprawiania zadań często jesteśmy wręcz zachwyceni zarówno pomysłowością zawodników, jak i wspaniałą redakcją rozwiązań. Prace wielu olimpijczyków można by drukować jako wzór: „tak należy pisać". Czasami jednak zawodnicy uciekają się do innych środków. Jeden z nich napisał kiedyś: *Dowód. Gdyby teza była fałszywa, stawiałoby to słabą notę organizatorom jako matematykom. cnd.* Przyznaliśmy mu za to punkt (w skali 0–10). Ongiś inny zawodnik, który już wcześniej był w finale, napisał pod tematem ostatniego zadania: *Moim zdaniem, zadania mogłyby być CIUT łatwiejsze.* Miał rację, w owym roku zadania II stopnia były nad wyraz trudne.

⋆⋆⋆

Entuzjazm Komitetu w Krakowie wzbudziła pozamatematyczna twórczość jednego z uczestników XXXIV OM. Otóż w brudnopisie narysował on groźnie wyglądającego mężczyznę z pistoletem wymierzonym w czytającego i podpisem: *Radziłbym zrobić TWÓRCĘ MEGO laureatem olimpiady. Po co sprawdzać zadania?* I poniżej: *Pośmiejcie się panowie trochę, bo jesteście tacy ponurzy...* Od tego czasu na herbatkach zaznaczamy, że my jesteśmy bardzo weseli, tylko w czasie zawodów musimy udawać poważnych. Oprócz bandyty z rewolwerem nasz zawodnik narysował w brudnopisie wcale udany akt, znakomite portrety niektórych członków KO i delegata z Warszawy oraz spodnie jednego z pilnujących (co prawda, bez tułowia, ale bez trudu poznaliśmy, czyje to są spodnie). Co ciekawe, zawodnik nie tylko rysował, ale również rozwiązał poprawnie trzy zadania i był wśród siódemki, którą proponowaliśmy do finału. Niestety, akurat jego Komitet Główny nie zakwalifikował. Może Centrali rysunki się nie spodobały?

⋆⋆⋆

Od tego roku, w którym znaleźliśmy owe niebanalne rysunki, bardzo starannie przeglądamy wszystkie brudnopisy. Warto! Kiedyś znaleźliśmy uwagę: *Co ja tu robię, skąd pomysł, by tu przyjść?* Inna uczestniczka napisała: *KONSTANTY I. GAŁCZYŃSKI, JIM MORRISON, BOB DYLAN, GEORGE ORWELL, JACK KERROVAL, KEN KESEY, JOSEPH HELLER – THEY WOULD NEVER SOLVE IT! Tell me, why have I to do it?* W jeszcze innym brudnopisie odkryliśmy przepiękną (dwie strony) bajkę o księżniczce, która potrzebowała miłości. Bajka zakończyła się stwierdzeniem: *Po co ja to piszę, i tak nikt tego nie przeczyta.* Autorka przyszła później na studia informatyczne, przekazaliśmy jej informację, że przeczytaliśmy i że nam się spodobało; ucieszyła się.

⋆⋆⋆

Na „herbatkę" po drugim dniu zawodów II stopnia regularnie zapraszamy gości: profesorów, studentów, przedstawicieli WOM... Ongiś, otwierając spotkanie, prowadzący zebranie rozpoczął słowami: *Wczorajsze zadania były proste. Dopiero dzisiejsze pokazały, co to naprawdę jest Olimpiada.* Na to siedzący przy mnie profesor matematyki (notabene były laureat Olimpiady) szepnął do mnie:

Ja widziałem te wczorajsze zadania i teraz nie wiem, gdzie się ze wstydu schować.

* * *

Gdy kwalifikujemy uczestników do zawodów II stopnia, ustalamy limit punktowy, a potem dokładnie patrzymy na wyniki uczestników, którzy znaleźli się trochę „poniżej poprzeczki" i analizujemy każdego indywidualnie. Często kwalifikujemy dodatkowe osoby; bierzemy pod uwagę na przykład to, że z danej szkoły czy klasy startuje tylko jedna osoba (a więc nie ma możliwości przedyskutowania rozwiązań z kolegami). Kiedyś zdarzyło się, że startujący po raz pierwszy w Olimpiadzie trzecioklasista rozwiązał poprawnie co prawda tylko 4 z 12 zadań, ale z oceną maksymalną, trzy z pozostałych miał ocenione na 6 lub 5 punktów (ocena pozytywna zaczyna się od 7), był z niewielkiego miasta, skąd od bardzo dawna nikt nie startował w Olimpiadzie... Jednomyślnie zakwalifikowaliśmy go do zawodów II stopnia „na zachętę".

Na „herbatce" tradycyjnie pytamy, kto zrobił co najmniej 3 zadania (z sześciu), zaczynając od pytania: *Kto zrobił 6 zadań?* Zazwyczaj pytanie to wita wybuch śmiechu i nikt się nie zgłasza. Gdy w owym roku zadałem to pytanie, tradycyjnie rozległ się śmiech na sali, ale zgłosił się jeden zawodnik – na sali było co prawda co najmniej kilku doświadczonych olimpijczyków, ale rękę podniósł właśnie ten zakwalifikowany „na zachętę". Oczywiście nie pokazaliśmy po sobie, że sceptycznie traktujemy tę deklarację; nikt z nas w sześć zrobionych zadań nie uwierzył. Tymczasem przy sprawdzaniu okazało się, że zawodnik naprawdę rozwiązał poprawnie 6 zadań!

* * *

Trudność zadania jest rzeczą bardzo subiektywną. Na „herbatce" tradycyjnie pytamy również o to, które zadanie było najłatwiejsze, a które najtrudniejsze. W roku jubileuszowej L Olimpiady wszyscy członkowie KO w Krakowie za najłatwiejsze uznali zadanie: *Dana jest funkcja* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, *taka, że* $f(\frac{1}{n})=(-1)^n$ *dla* $n=1,2,\ldots$ *Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, *że* $f=g-h$. Tymczasem tylko niektórzy z uczestników zawodów podzielili tę opinię; w wyniku głosowania za najłatwiejsze zostało uznane zadanie inne, a według niektórych zawodników zadanie o tych funkcjach było wręcz najtrudniejsze. Jak widać, pewne obycie z wyższą matematyką może istotnie wpłynąć na pogląd o łatwości czy trudności zadania.

* * *

Należy podziwiać olimpijczyków; ich wiedza i umiejętności rozwiązywania problemów bywają czasami niewiarygodne. Uważam, że należy dołożyć starań, by za swoje osiągnięcia byli oni odpowiednio honorowani. Już zakwalifikowanie się do zawodów II stopnia jest ogromnym sukcesem – do zawodów tych dostaje się zaledwie około 500 osób w Polsce! Kilka lat temu udało nam się w Krakowie rozszerzyć listę olimpijczyków uprawnionych do premii przy egzaminach wstępnych: uczestnikom zawodów II stopnia, którzy co prawda nie dostali się do finału, ale osiągnęli dobre wyniki i uzyskali rekomendację Komitetu Okręgowego, przysługuje zwolnienie z egzaminu wstępnego z matematyki lub wręcz przyjęcie bez egzaminu na niektóre uczelnie. Ale bardzo ważne jest też, by nie traktować wyników w olimpiadzie na zasadzie „jeśli mi nie pójdzie, to znaczy, że nie nadaję się na matematyka". Gdy sam w olimpiadzie startowałem, twierdziłem, że by dostać się do finału, trzeba – niezależnie od umiejętności matematycznych – mieć trochę szczęścia. Dziś, po ponad ćwierć wieku aktywnych kontaktów z Olimpiadą, mam dokładnie takie samo zdanie.

jest ona podstawą żadnej ciekawej teorii (a także dlatego, że jest nadzieja, iż da się ją udowodnić na gruncie dotychczasowych aksjomatów). Zatem w matematyce czystej chodzi przede wszystkim o sztukę dedukcji raczej niż o fakty. Hipoteza continuum jest jeszcze bardziej abstrakcyjna, bo nie ma żadnego znaczenia fizycznego; mimo to stanowi ona problem nadzwyczaj piękny.

Nie znaczy to, że matematyka czysta bierze się tylko z wyobraźni ludzkiej. Przeciwnie, prawie cała matematyka inspirowana jest przez opisy świata fizycznego. Na przykład pojęcie zbioru nieskończonego inspirowane jest przez na pozór niekończące się procesy oraz przez kontinuum fizycznej czasoprzestrzeni.

Wspomnimy jeszcze, że podstawy matematyki wyłoniły w XX wieku wiele jeszcze innych dziedzin, w tym logiki nieklasyczne i modalne, logikę konstruktywną (intuicjonizm), rekurencyjną matematykę i inne specjalności. Nie mamy, niestety, miejsca, by omówić w tym artykule, choćby pobieżnie, osiągnięcia tych dziedzin.

Ostatnia część artykułu ukaże się w *Delcie* 3/2000.

Rozwiązanie zadania M 905.
Ponumerujmy wszystkie odważniki według wzrastającej masy: $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Podstawą naszego rozwiązania będzie następujący prosty fakt: Jeśli na szalkach znajdują się odważniki $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{l-1}, a_l$, przy czym na jednej z nich są te o parzystych numerach, a drugiej – o nieparzystych, to przeważa ta szalka, na której leży odważnik a_l. Rozważmy teraz dowolny n-wyrazowy ciąg (x_i) liter P i L ($i\in\{1,\ldots,n\}$). Szalki będziemy oznaczać również literami P lub L. Proces kładzenia odważników zrealizujemy „od końca". Na szalce x_n położymy wszystkie odważniki o tej samej parzystości numeru co n, a na drugiej pozostałe. Na mocy przytoczonego wyżej faktu przeważy szalka x_n. Aby otrzymać ciąg $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, będziemy ściągać odważniki z szalek według następującej zasady: zawsze ściągamy albo najcięższy, albo najlżejszy z odważników znajdujących się na szalkach w zależności od tego, czy następuje zmiana w ciągu $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, czy nie. Aby otrzymać ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wystarczy odwrócić kolejność wykonywanych czynności.

Rozwiązanie zadania F 516.
Rozprzestrzenianie się zapachu w gazie jest spowodowane przypadkowym błądzeniem cząsteczek substancji zapachowej. Kierunki ruchu i wartości prędkości tych cząsteczek zmieniają się na skutek bezustannych zderzeń z cząsteczkami gazu. Dlatego wypadkowa prędkość przemieszczania się cząsteczek zapachu nie jest duża.