Losowe prognozy pogody

Bolesław KOPOCIŃSKI

Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności wymaga prognozowania zdarzeń. Praktyka krótkoterminowych prognoz pogody w naszym klimacie pokazuje, że to zadanie nie jest trudne. Hugo Steinhaus (1887–1972), matematyk lwowski i wrocławski, znawca problemów świata zewnętrznego, proponował dla Wrocławia następującą prognozę: jutro będzie taka sama pogoda jak dzisiaj. Nieco dla przekory sprawdzimy tę prognozę dla Phoenix w USA (J.E. Freud, *Podstawy nowoczesnej statystyki*, PWE, Warszawa 1971). Zapisywano tam zachmurzenie nieba w procentach. Dzień uznajemy za: słoneczny, o zachmurzeniu zerowym (Z, 0–5% zachmurzenia), średnim (S, 6–49%) lub dużym (D, 50–100%). Stan zachmurzenia następnego dnia oznaczmy odpowiednio przez Z^*, S^* i D^*. Tabela pokazuje następstwo pogody zaobserwowane w 61 dniach lata 1964 roku.

		Pogoda jutro			
		Z^*	S^*	D^*	Razem
Pogoda dziś	Z	19	5	4	28
	S	6	2	6	14
	D	2	7	9	18

Częstościowe oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń Z, S, D są więc następujące: $P(Z) = \frac{28}{60}$, $P(S) = \frac{14}{60}$, $P(D) = \frac{18}{60}$. Wiersze tabeli pozwalają obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(Z^*|Z) = \frac{19}{28}, \quad P(S^*|Z) = \frac{5}{28}, \quad P(D^*|Z) = \frac{4}{28},$$

$$P(Z^*|S) = \frac{6}{14}, \quad P(S^*|S) = \frac{2}{14}, \quad P(D^*|S) = \frac{6}{14},$$

$$P(Z^*|D) = \frac{2}{18}, \quad P(S^*|D) = \frac{7}{18}, \quad P(D^*|D) = \frac{9}{18},$$

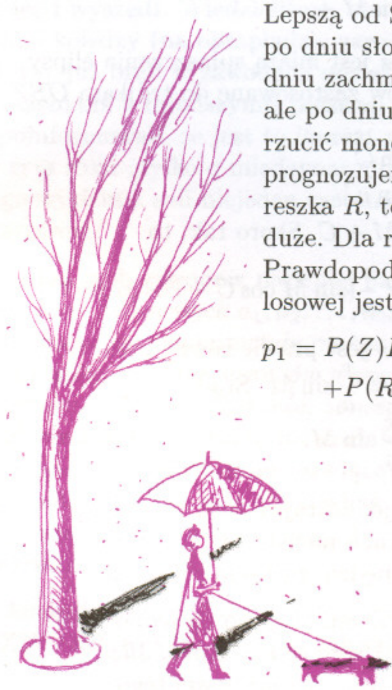
Prawdopodobieństwo trafności prognozy Steinhausa wynosi

$$p = P(Z)P(Z^*|Z) + P(S)P(S^*|S) + P(D)P(D^*|D) = 0{,}5.$$

Lepszą od Steinhausowej jest prognoza losowa: po dniu słonecznym jest dzień słoneczny, po dniu zachmurzonym jest dzień zachmurzony, ale po dniu średnio zachmurzonym należy rzucić monetą: jeśli wypadnie orzeł O, to prognozujemy dzień słoneczny, jeśli zaś reszka R, to prognozujemy zachmurzenie duże. Dla rzetelnej monety $P(O) = P(R) = \frac{1}{2}$. Prawdopodobieństwo trafności prognozy losowej jest więc równe

$$p_1 = P(Z)P(Z^*|Z) + P(S)[P(O)P(Z^*|S) + \\ + P(R)P(D^*|S)] + P(D)P(D^*|D) = 0{,}57.$$

Można proponować także inne prognozy, równie dobre; zauważmy jednak, że orzeczenia prognozy losowej, wielokrotnie powtarzane, najlepiej oddają prawdziwy rozkład zachmurzenia w Phoenix.



Podstawy matematyki w wieku XX

3. Logika i obliczalność

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Poprzednie części artykułu ukazały się w *Deltach*: 9/1999 i 11/1999.

Przejdźmy teraz do omówienia logiki i teorii modeli. Rozwój logiki matematycznej wymagał sprecyzowania przedmiotu logiki. Na początku XX wieku było ono nieco różne od dzisiejszego. Co prawda Frege wprowadził formalizm, który później został powszechnie przyjęty, ale sporo czasu zajęło wprowadzenie lepszej notacji! Whitehead i Russell, w książce „Principia Mathematica", której pierwszy tom ukazał się w roku 1910, spopularyzowali współczesny opis składni logiki, ale włączyli do niej część współczesnej teorii mnogości. Pierwszy naprawdę nowoczesny podręcznik logiki matematycznej, napisany przez Hilberta i Ackermanna, ukazał się w roku 1928. Zasadniczy problem, jakie to formuły są zawsze prawdziwe, przy założeniu jakiegoś zbioru formuł A, został rozstrzygnięty przez Gödla w jego pracy doktorskiej opublikowanej w roku 1930. Wykazał tam Gödel, że reguły dowodzenia, wskazane przez Fregego i spopularyzowane przez Whiteheada i Russella, są zupełne – to, co daje się dowieść za pomocą tych reguł z aksjomatyki A, to dokładnie zdania prawdziwe we wszystkich modelach aksjomatyki A. Własność tę nazywamy twierdzeniem o zupełności dla logiki pierwszego rzędu.

Streśćmy pokrótce dowód twierdzenia o zupełności (pochodzący od Henkina i nieco inny niż oryginalny dowód Gödla). Najpierw musimy wykazać, że cokolwiek jest dowodliwe (w systemie „Principia Matematica") z aksjomatyki A, jest prawdziwe we wszystkich modelach A. To wiedzieli już Whitehead i Russell. W drugą stronę rozumowanie jest trudniejsze – jeśli A nie dowodzi jakiejś formuły φ, to musimy skonstruować model, w którym A jest prawdziwa, ale φ nie jest. Model taki konstruujemy, dodając odpowiednie stałe i budując na nich interpretację spełniającą aksjomaty A oraz $\neg\varphi$. Na nowych stałych musimy definiować relacje