Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2000

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 381 (WT=2,46) i 382 (WT=1,31)
z numeru 5/1999

Piotr Kumor	– Olsztyn	42,95
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	42,35
Janusz Olszewski	– Suwałki	36,66
Andrzej Daniluk	– Kraków	35,82
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12

Zadania z matematyki nr 393, 394

Redaguje Marcin E. KUCZMA

393. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ losujemy bez zwracania m liczb $(1 \le m \le 2000)$. Niech p_m będzie prawdopodobieństwem tego, że suma wylosowanych liczb dzieli się przez 5. Wyznaczyć te wartości m, dla których $p_m = 1/5$.

394. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych (a, b) o tej własności, że wielomian $P(x) = x^5 - ax + b$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest równy 1.

Zadanie 394 zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1999

Przypominamy treść zadań:

385. Wyznaczyć wszystkie liczby $\delta > 0$, dla których jest prawdziwe następujące zdanie: jeżeli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$, to dla pewnej liczby x zachodzi równość: $f(x) = f(x+\delta)$.

386. Niech $n \ge 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Obliczyć maksymalną wartość, jaką może mieć suma $\sum |P_iP_j|^2$ dla n punktów $P_1, \ldots, P_n$ leżących na sferze o promieniu 1 (suma $\binom{n}{2}$ składników, odpowiadających wszystkim parom (i,j), $i<j$).

385. Aby mogła zajść równość $f(x) = f(x+\delta)$, liczby x oraz $x+\delta$ muszą należeć do dziedziny funkcji f, czyli do przedziału $[0,1]$. Zatem rozważane zdanie nie jest prawdziwe dla żadnej liczby $\delta > 1$. W dalszym ciągu ograniczamy uwagę do liczb $\delta \le 1$.

Przypuśćmy najpierw, że $\delta = 1/n$ dla pewnej liczby naturalnej n. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$. Określamy funkcję $g\colon [0, 1-\delta] \to \mathbb{R}$ wzorem: $g(x) = f(x+\delta) - f(x)$. Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(k\delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f((k+1)\delta) - f(k\delta)\big) = f(n\delta) - f(0) =$$

$$= f(1) - f(0) = 0,$$

zatem co najmniej jeden składnik sumy $\sum g(k\delta)$ jest liczbą nieujemną i co najmniej jeden składnik jest liczbą niedodatnią. Z ciągłości funkcji g wynika, że dla pewnego x zachodzi równość $g(x) = 0$, czyli $f(x+\delta) = f(x)$.

Przypuśćmy z kolei, że $\delta \ne 1/n$ dla wszystkich liczb naturalnych n. Znajdujemy takie liczby $m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, że $1 = m\delta + \gamma$, $0 < \gamma < \delta$. Niech $h\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}$ będzie jakąkolwiek funkcją ciągłą spełniającą warunki $h(0) = h(\delta) = 0$, $h(\gamma) = 1$. Przedłużamy ją do ciągłej funkcji okresowej $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o okresie δ. Definiujemy funkcję ciągłą $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = h(x) - x \quad \text{dla} \quad x \in [0,1].$$

Oczywiście $f(0) = 0$,

$$f(1) = h(1) - 1 = h(m\delta + \gamma) - 1 = h(\gamma) - 1 = 0.$$

A skoro równość $h(x+\delta) = h(x)$ zachodzi dla każdej liczby x, to analogiczna równość dla funkcji f nie zachodzi dla żadnej liczby x. Skonstruowany przykład pokazuje, że w tym przypadku rozważane zdanie nie jest prawdziwe.

Wniosek: zdanie to jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy δ jest odwrotnością liczby naturalnej.

386. Niech $\mathbf{v}_i$ będzie wektorem długości 1, zaczepionym w środku sfery, o końcu w punkcie P_i. Wówczas

$$\sum_{i<j} |P_iP_j|^2 = \sum_{i<j} |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = \sum_{i<j} (|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_j|^2 - 2\cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) = \sum_{i<j} (2 - 2\cdot \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) =$$

$$= 2\binom{n}{2} - \left(\Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 - \sum_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) = n(n-1) - \Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 + n = n^2 - \Big|\sum_i \mathbf{v}_i\Big|^2 \le n^2.$$

Równość w tym szacowaniu zachodzi, gdy $\sum \mathbf{v}_i$ jest wektorem zerowym, czyli, na przykład, dla punktów $P_1, \ldots, P_n$ będących wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w koło wielkie danej sfery. Szukane maksimum wynosi zatem n^2.

Zadania z fizyki nr 290, 291

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2000

290. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B znajduje się nieruchomy ładunek punktowy Q. Małe ciało o masie m i ładunku q umieszczono w punkcie odległym od Q o r_0, przy czym odcinek $q-Q$ był prostopadły do $\vec{B}$, a prędkość początkowa ciała była równa zeru; ponadto przyjmijmy, że znaki ładunków są jednakowe. Wykazać, że w czasie ruchu ciała jego odległość od Q nie przekroczy pewnej maksymalnej wielkości $r_{\max}$ i podać równanie pozwalające obliczyć tę wielkość.

291. Dwie równoległe czarne powierzchnie płaskie znajdują się w temperaturach $0°$C i $100°$C, a w obszarze między nimi jest próżnia. Jeśli wprowadzimy w ten obszar cienką czarną płytę równoległą do obu powierzchni, to jaką temperaturę przybierze ona po długim czasie? Rozmiary powierzchni są znacznie większe od odległości między nimi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 280 (WT=1,69) i 281 (WT=2,23) z numeru 6/1999

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	44,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	31,26
Aleksander Surma	– Myszków	25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	22,63
Jarosław Łazuka	– Warszawa	20,19
Grzegorz Miłoś	– Mielec	17,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	15,53
Marek Wójcicki	– Szczecin	13,96

Na uzyskanie tytułu **Weterana Ligi 44 F** p. Andrzej Idzik potrzebował tylko około 3,5 roku!

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1999

Przypominamy treść zadań:

282. W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym umieszczono prostopadle do niego dwie przewodzące płytki i zwarto je, tak że wskutek indukcji na płytkach pojawiły się ładunki przeciwnego znaku. Czy wzajemne przyciąganie tych płytek jest silniejsze, czy słabsze od rozciągającego je oddziaływania ze strony pola zewnętrznego?

283. 4 lutego 1999 r. rosyjscy kosmonauci przeprowadzili (nieudany) eksperyment z oświetleniem powierzchni Ziemi światłem słonecznym odbitym od zwierciadła umieszczonego na orbicie. Jak podawała prasa, zwierciadło było kołem o średnicy 25 m, a wysokość orbity wynosiła 360 km. Jeśli odbita wiązka światła pada na powierzchnię Ziemi prostopadle, a zwierciadło jest płaskie, to jaka jest średnica wytworzonego „zajączka"? Czy można ją zmniejszyć, stosując zwierciadło wklęsłe? Ile razy silniejsze jest oświetlenie takim zwierciadłem od Księżyca w pełni? Dane: średnica kątowa Słońca i Księżyca na niebie – około $32'$, średnie albedo Księżyca (współczynnik odbicia światła od jego powierzchni) – 0,073.

282. Silniejsze jest oddziaływanie ze strony pola zewnętrznego, co można wykazać najprościej na podstawie bilansu energii: między płytkami wypadkowe natężenie pola jest równe zeru, zatem rozsunięcie płytek powoduje zmniejszenie objętości obszaru, w którym występuje pole elektryczne i zmniejszenie energii pola. Stąd praca wykonywana przy oddalaniu płytek jest ujemna, czyli siła rozciągająca przeważa.

283. Po odbiciu od małego zwierciadła płaskiego wiązka światła o szerokości kątowej $32' = 9{,}3\cdot 10^{-3}$ rad utworzy w odległości 360 km „zajączek" o średnicy $360\cdot 9{,}3\cdot 10^{-3}$ km $= 3{,}4$ km. Dla dużego zwierciadła do tego wyniku należałoby w zasadzie dodać średnicę zwierciadła, co jednak dla zwierciadła o rozmiarach kilkudziesięciu metrów nie ma praktycznie żadnego znaczenia (teoretycznie można by wyeliminować to dodatkowe zwiększenie „zajączka", stosując zwierciadło wklęsłe o ogniskowej 360 km). Oznaczmy stałą słoneczną (natężenie oświetlenia powierzchni prostopadłej do promieni słonecznych) przez I_0. Mnożąc ją przez powierzchnię zwierciadła, znajdujemy moc, która następnie rozkłada się na powierzchnię „zajączka". Po przekształceniach stwierdzamy, że natężenie I_z oświetlenia „zajączka" jest dane wzorem

$$I_z = I_0\left(\frac{\alpha_z}{\alpha_0}\right)^2,$$

gdzie α_0 jest daną średnicą kątową Słońca, a $\alpha_z = (25\text{ m}/360\text{ km}) = 6{,}9\cdot 10^{-5}$ rad jest średnicą kątową zwierciadła.

Całkowita moc promieniowania docierająca do powierzchni Księżyca jest równa iloczynowi I_0 przez „pole tarczy Księżyca" πR_k^2, a po pomnożeniu przez albedo a znajdujemy moc wypromieniowaną. Jak wynika z prawa Lamberta, natężenie I_k oświetlenia powierzchni Ziemi przez Księżyc w pełni wyznaczymy, dzieląc tę moc przez πR^2 (gdzie R jest odległością Księżyca od Ziemi):

$$I_k = aI_0\cdot\left(\frac{R_k}{R}\right)^2 = aI_0\frac{1}{4}\alpha_0^2,$$

przy czym podstawiliśmy średnicę kątową Księżyca równą α_0. Ostatecznie stosunek oświetleń wynosi

$$\frac{I_z}{I_k} = \frac{4}{a}\cdot\frac{\alpha_z^2}{\alpha_0^4} = 35.$$

Według danych prasowych średnica „zajączka" miała w rzeczywistości wynosić od 5 do 8 km, a stosunek oświetleń – od 5 do 10, zapewne wskutek niedoskonałości zwierciadła (które nie było też, jak się zdaje, pełnym kołem).

Rozwiązanie zadania F 515.
W gazach między cząsteczkami działają siły wzajemnego przyciągania, które dążą do zmniejszenia objętości gazu. To znaczy, że w utrzymaniu gazu w danej objętości ciśnieniu zewnętrznemu pomaga ciśnienie wewnętrzne, które powstaje na skutek wzajemnego przyciągania cząsteczek. Zatem gdyby siły wzajemnego przyciągania przestały działać, ciśnienie gazu zwiększyłoby się.