1/00 (25)

Γ $\lim\limits_{n\to\infty}$atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (20)

ZADANIE: Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c zachodzi równość

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2},$$

gdzie $(x,y,\ldots,z)$ i $[x,y,\ldots,z]$ oznaczają odpowiednio największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb x, $y,\ldots$, z.

Rozwiązanie: Korzystając z faktu, że najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa iloczynowi podzielonemu przez największy wspólny dzielnik, otrzymujemy po przekształceniu lewej strony, danej w zadaniu, równości:

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{\frac{ab}{(a,b)}\cdot\frac{bc}{(b,c)}\cdot\frac{ca}{(c,a)}}{\frac{a^2b^2c^2}{(a,b,c)^2}}=$$

$$=\frac{ab\cdot bc\cdot ca}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2}=\frac{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}{(a,b,c)^2},$$

co kończy dowód.

JWR

PISZEMY PRACE ($1'$, $2'$, $3'$)

Czytelnicy nadesłali 3 opracowania tematu *Tożsamości w trójkącie Pascala*, natomiast na tematy *Krzywe drugiego stopnia w geometrii* oraz *Wokół wielkiego twierdzenia Fermata* nie było, niestety, odzewu. Tematy te pozostają więc aktualne i zachęcamy obecnych uczniów szkół średnich do sięgnięcia do *Delty* 2/1999 i 3/1999 i nadesłania pod adresem Γ-limatiasu swoich opracowań do końca kwietnia 2000 r.

Co do opracowań tematu dotyczącego trójkąta Pascala, to miło mi zakomunikować, że wspólna praca kol. kol. Łukasza Kamińskiego i Pawła Rochmana zdobyła srebrny medal w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. W pracy tej autorzy wyprowadzili ogólne wzory na sumy ze współczynnikami Newtona, których ze względu na ograniczoną objętość niniejszej rubryki nie sposób zacytować w pełnej ogólności.

Pozostałe dwie prace nie zakwalifikowały się do finału Konkursu. W jednej z nich kol. Szymon Toruńczyk udowodnił tożsamość

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots=F_{n+1},$$

gdzie F_n jest n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego. W drugiej kol. Michał Węgierek zaprezentował opracowanie dotyczące trójkąta Pascala, liczb Stirlinga i liczb Eulera.

Za nadesłane prace dziękujemy i zachęcamy do dalszego udziału w Konkursie. Pamiętajcie, że bezpośrednio do Redakcji *Delty* można nadsyłać prace konkursowe na dowolny temat (oczywiście z matematyki). Regulamin Konkursu znajdziecie w tym numerze *Delty*.

JWR

GRY (9)

Gdybyś bał się ze mną zagrać, Drogi Czytelniku, mógłbym Ci obiecać, że zagramy w najprostszą ze wszystkich gier, a ponadto dam Ci fory w postaci pierwszego ruchu. Zgoda? Oto najprostsza ze wszystkich gier: $\{\}$. Zaczynamy. Twój ruch. Co robisz? Nie masz dostępnego żadnego legalnego ruchu? No cóż, przegrałeś.

Grę przedstawioną powyżej nazwiemy *końcówką* i oznaczymy przez 0. Jak widzisz, Drogi Czytelniku, nie jest to gra specjalnie podniecająca, ale pojawia się ona jako pozycja końcowa w każdej grze. Jest to bowiem jedyna pozycja, w której przegrywa się natychmiast.

Znamy już jeden przykład gry. Jakie nowe gry możemy z niej utworzyć? Jedną, a mianowicie $\{0\}$. Co to za gra? W tej grze gracz rozpoczynający nie ma wiele do myślenia, gdyż ma tylko jedną możliwość wykonania ruchu, a mianowicie przejście do pozycji $0=\{\}$ i świętowanie zwycięstwa, gdyż jego przeciwnik nie ma możliwości wykonania ruchu. Tę grę nazwiemy 1.

Znamy 2 przykłady gier. Możemy utworzyć 2 nowe przykłady: $2=\{0,1\}$ i $\{1\}$. Prześledźmy grę 2. Pierwszy gracz ma dwie opcje: przejście do pozycji 1 (i przegrana) oraz przejście do pozycji 0 (i wygrana). Oczywiście każdy rozsądny gracz wybierze pozycję 0 i wygra. W grze $\{1\}$ ruchy są wymuszone: pierwszy gracz 1, drugi gracz 0, pierwszy gracz – brak legalnego ruchu i przegrana.

Znamy 4 przykłady gier. Możemy utworzyć 12 nowych przykładów: $3=\{0,1,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,2\}$, $\{2\}$, $\{0,1,2,\{1\}\}$, $\{1,2,\{1\}\}$, $\{0,2,\{1\}\}$, $\{2,\{1\}\}$, $\{0,1,\{1\}\}$, $\{1,\{1\}\}$, $\{0,\{1\}\}$, $\{\{1\}\}$.

Znając 16 gier, możemy utworzyć $2^{16}-16=65520$ nowych przykładów, w tym grę $4=\{0,1,2,3\}$. Jeśli otarłeś się o podstawy teorii mnogości, Drogi Czytelniku, możesz sobie pomyśleć: *Zapisujemy gry jak zbiory, tworzymy nowe gry jak zbiory, czy gry mają coś wspólnego ze zbiorami?* Naprawdę gry w rozważanym przez nas sensie są po prostu zbiorami.

A dlaczego pewne gry nazwaliśmy 0, 1, 2, 3, 4, ...? Bo odpowiadają one grze *Nim* z jednym stosem zawierającym 0, 1, 2, 3, 4,... bierek.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl