Zasada nieoznaczoności

Jerzy KAMIŃSKI

W dniu 23 marca 1927 roku do redakcji *Zeitschrift für Physik* wpłynęła praca *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik* (*O poglądowej treści kwantowoteoretycznej kinematyki i mechaniki*). Autor, Werner Heisenberg, przebywał wtedy na asystenturze u Nielsa Bohra w Kopenhadze. Ta 27-stronicowa publikacja, uważana za najbardziej doniosłe osiągnięcie Heisenberga w fizyce, zawierała sformułowanie zasady nieoznaczoności, która wspólnie z zasadą komplementarności, ogłoszoną przez Bohra latem tego samego roku na konferencji w Como, i podaną nieco wcześniej przez Maxa Borna statystyczną interpretacją funkcji falowej, stanowi fundament tzw. kopenhaskiej interpretacji (nierelatywistycznej) mechaniki kwantowej, do dziś bardzo kontrowersyjnej, lecz kończącej głęboką przemianę fizyki, w której wyniku powstała teoria opisująca niezmiernie szerokie spektrum zjawisk fizycznych i zmieniająca całkowicie nasze rozumienie przyrody.

W mechanice klasycznej opisuje się ruch elektronu, podając jego położenie i prędkość w dowolnej chwili. Heisenberg twierdził jednak, że w mikroświecie pojęcie toru cząstki nie ma sensu. Jeśli bowiem chcemy dokładnie znać położenie elektronu, to musimy użyć np. mikroskopu o wielkiej zdolności rozdzielczej, a to wymaga oświetlenia elektronu światłem o bardzo małej długości fali. Im krótsza fala, tym większą energię kwant światła przekazuje elektronowi i tym większego odrzutu doznaje elektron. Powoduje to utratę pewnej informacji o prędkości elektronu – tym większą, im dokładniej chcemy mierzyć położenie. Heisenberg stwierdził więc, że musi istnieć związek między nieokreślonościami, z jakimi możemy jednocześnie zmierzyć położenie i prędkość elektronu. Jak ten związek ująć matematycznie?

W mechanice kwantowej najpełniejszego opisu układu dostarcza funkcja falowa, spełniająca równanie wprowadzone przez Erwina Schrödingera w 1926 r. W najprostszym przypadku ruchu jednowymiarowego, gdy cząstka o masie m oddziałuje z zewnętrznym polem sił o potencjale $V(x,t)$, równanie to ma postać

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\psi(x,t)\,,$$

gdzie $i^2 = -1$, a $\hbar$ jest tzw. kreśloną stałą Plancka. Wynika z niego w szczególności, że niezależnie od postaci funkcji ψ w chwili początkowej t_0 w dowolnej innej chwili t zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t_0)|^2\,\mathrm{d}x\,,$$

o ile powyższe całki są skończone. Ta własność rozwiązań równania Schrödingera pozwoliła Maxowi Bornowi podać interpretację fizyczną (unormowanej) funkcji falowej: kwadrat jej modułu, $|\psi(x,t)|^2$, jest gęstością prawdopodobieństwa przebywania cząstki w punkcie x w chwili t.

A jaka jest gęstość prawdopodobieństwa, że cząstka ma pęd p? Z interpretacji Borna i z samego równania Schrödingera wynika, że gęstość ta w chwili t wynosi $|\tilde{\psi}(p,t)|^2/(2\pi\hbar)$, gdzie $\tilde{\psi}$ jest transformatą Fouriera funkcji ψ, tzn.

$$\tilde{\psi}(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\psi(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Z zasadą nieoznaczoności ściśle wiąże się następujący fakt: im bardziej funkcja jest skupiona wokół pewnej wartości argumentu, tym bardziej rozmyta jest jej transformata Fouriera i na odwrót. By tę relację ująć ilościowo, można posłużyć się wartościami średnimi potęg położenia i pędu w chwili t, które zgodnie z ogólnymi zasadami rachunku prawdopodobieństwa określa się wzorami

$$\langle x^n\rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\langle p^n\rangle_t = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} p^n|\tilde{\psi}(p,t)|^2\,dp$$

(zakładamy, że całki są skończone). Zwykle za miary nieokreśloności położenia i pędu w chwili t uznaje się dyspersje $\Delta x(t) = \sqrt{\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2}$ i $\Delta p(t) = \sqrt{\langle p^2\rangle_t - \langle p\rangle_t^2}$. Okazuje się, że zachodzi nierówność

$$\Delta x(t)\cdot\Delta p(t) \geq \hbar/2\,,$$

będąca matematycznym wyrazem zasady nieoznaczoności. Ambitni Czytelnicy mogą wyprowadzić ją sami (trzeba posłużyć się dobrze znaną nierównością Cauchy'ego–Schwarza).

W modelu Bohra atomu wodoru postuluje się, że elektron, okrążając jądro atomowe, nie promieniuje. Postulat ten jest w sprzeczności z fizyką klasyczną, gdyż naładowana cząstka, poruszająca się ruchem przyspieszonym, musi promieniować i, w wyniku utraty energii, spaść na jądro atomowe. Zasada nieoznaczoności pozwala wyjaśnić ten paradoks. Spadający elektron byłby coraz lepiej zlokalizowany, więc nieoznaczoność jego pędu musiałaby rosnąć, a wraz z nią średnia energia całkowita.

Jedną z głębokich konsekwencji zasady nieoznaczoności jest pogwałcenie klasycznego determinizmu: skoro nie znamy położenia i prędkości w jednej chwili, nie umiemy ich wyznaczyć w momentach późniejszych. Możemy tylko określić gęstości prawdopodobieństw obu wielkości, co – jak stwierdził już Heisenberg – oznacza, że przewidywania mechaniki kwantowej mają w ogólności jedynie charakter statystyczny. Była to konkluzja, z którą nie mogło się pogodzić wielu współczesnych mu fizyków tej miary, co Albert Einstein, Max Planck i Erwin Schrödinger.