Niezależność zdarzeń

Jacek JAKUBOWSKI

Niezależność jest jednym z najważniejszych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, wykorzystywanych nieświadomie (bez podawania ścisłej definicji) od samego początku powstawania teorii. Mianowicie, prawdopodobieństwo zajścia n zdarzeń jednocześnie obliczano jako iloczyn prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń (tzw. reguła mnożenia). Najbardziej spektakularny przykład to rozpatrywany przez Bernoulliego schemat n-krotnego powtórzenia tego samego doświadczenia o dwu możliwych wynikach. Brak ścisłej definicji niezależności, a także ogólnej definicji prawdopodobieństwa, prowadził do wielu błędów. Np. d'Alembert uważał, że szansa uzyskania dwu orłów w dwu rzutach monetą jest równa $1/3$, gdyż jeśli otrzymamy za pierwszym razem reszkę, to drugi raz nie warto rzucać, a gdy za pierwszym razem wypadnie orzeł, to za drugim razem może wypaść orzeł lub reszka, a więc mamy trzy równoprawne zdarzenia $\{R, OR, OO\}$. Tego typu błędy, paradoksy (np. Bertranda) oraz różnego rodzaju nadinterpretacje spowodowały, że wiele osób nie uważało rachunku prawdopodobieństwa za gałąź matematyki. Dopiero praca wielu matematyków uwieńczona podaniem przez Kołmogorowa aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa i definicji niezależności spowodowała, że rachunek prawdopodobieństwa stał się ścisłą teorią matematyczną. Niezależność została związana z pojęciem miary i uzyskała jasną interpretację.

Definicja. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ z danej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ są niezależne, gdy

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

dla dowolnych $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, $k = 2, \ldots, n$.

Zatem niezależność definiujemy za pomocą reguły mnożenia (która, jak już wspominałem, nie była wysłowiona, ale była używana od samego początku).

Teraz skoncentrujemy się na niezależności dwu zdarzeń. Zacznijmy od przykładu: gdy wyciągamy jedną kartę z talii 52 kart, to zdarzenia: A – wyciągnięcie pika i B – wyciągnięcie asa są niezależne (gdyż $P(A) = 13/52$, $P(B) = 4/52$, $P(A \cap B) = 1/52$). Natomiast zdarzenia: C – wyciągnięcie pika i D – wyciągnięcie karty czarnej starszej niż 10 nie są niezależne, gdyż $P(C) = 13/52$, $P(D) = 8/52$, $P(C \cap D) = 4/52$. Zdarzenie pewne (Ω) i zdarzenie niemożliwe ($\emptyset$) są niezależne od każdego innego zdarzenia. Jednakże nie zawsze istnieją takie zdarzenia niezależne A, B, że $P(A), P(B) \in (0,1)$. Na przykład biorąc $\Omega = \{1, 2, \ldots, 13\}$ i przyjmując, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, weźmy $P(A) = k/13$, $P(B) = l/13$, $P(A \cap B) = m/13$, $0 < k, l < 13$. Zdarzenia A, B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{k}{13}\frac{l}{13} = \frac{m}{13}$ – – $kl = 13m$, a ta równość zachodzić nie może.

Wykluczające się zdarzenia A, B są często uważane za niezależne. Tymczasem są one niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$.

Rozważmy teraz zadanie. Spośród rodzin mających $n > 1$ dzieci wybieramy losowo jedną. Czy zdarzenie A: *w wybranej losowo rodzinie są dziewczynki i chłopcy* i zdarzenie B: *w wybranej losowo rodzinie jest co najmniej jedna dziewczynka*, są niezależne? Zdarzenia elementarne to uporządkowane według wieku dzieci. Są one jednakowo prawdopodobne. Jak łatwo sprawdzić (zachęcam, by Czytelnik to zrobił), A i B są niezależne – $n = 3$. Zatem na podstawie samego opisu zdarzeń nie można stwierdzić, czy są one niezależne, czy nie.

Warto sobie uświadomić, że pojęcie niezależności w rachunku prawdopodobieństwa jest różne od potocznego rozumienia tego słowa. Na przykład, temperatura morza nie zależy od mojej ochoty do kąpieli, natomiast moja chęć do kąpieli zależy od temperatury morza – w rachunku prawdopodobieństwa zdarzenia są wzajemnie niezależne.

Gdy $P(B) > 0$, to (z definicji prawdopodobieństwa warunkowego) mamy $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$, zatem niezależność zdarzeń A, B jest równoważna warunkowi $P(A|B) = P(A)$, czyli warunkowi, że zajście zdarzenia B nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Tak wygląda jedno z intuicyjnych wyobrażeń niezależności.

Gdy wrócimy do definicji n zdarzeń niezależnych, to widzimy, że trzeba sprawdzić $2^n - n - 1$ równości. Ale na szczęście często można je sprawdzić za pomocą jednego rozumowania. Przykładem tego może być dowód, że przy n-krotnym rzucie kostką niezależne są zdarzenia A_k: w k-tym rzucie wypadła szóstka, $k = 1, 2, \ldots, n$. Istotnie, dla dowolnego wyboru indeksów,

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{6^{n-k}}{6^n} = \frac{1}{6^k} = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Także zamiana dowolnej liczby z niezależnych zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na przeciwne zachowuje niezależność (co sprawdzamy indukcyjnie). Stąd np. jeśli w doświadczeniu, polegającym na tym, że n osób oddaje strzał do tarczy, zdarzenia, iż poszczególni strzelcy trafiają do tarczy, są niezależne, to zdarzenia, że poszczególni strzelcy nie trafiają, też są niezależne. Powstaje pytanie, czy w definicji niezależności nie ma za dużo warunków, czy nie można by opuścić pewnych równości. Okazuje się, że do niezależności nie wystarczy niezależność zdarzeń parami; np. przy dwukrotnym rzucie monetą zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadł orzeł, B – za drugim razem wypadł orzeł, C – za pierwszym i drugim razem wypadła ta sama strona monety, są parami niezależne, a wszystkie trzy nie są niezależne. (Czytelnik zechce sam podać przykład zdarzeń A, B, C, które nie są parami niezależne, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.) Zatem liczby równości, które trzeba sprawdzać w definicji niezależności, nie można zredukować.