Prawdopodobieństwo i pochopne rozumowania

Rozważmy z początku bardzo prosty przykład: pani w szkole rozdaje z czapki dziesięć losów, z których tylko jeden wygrywa (można go wymienić na bilet do kina). Gdzie należy się ustawić w dziesięcioosobowej kolejce, żeby mieć największe szanse wygranej?

Jeden powie: oczywiście z przodu, bo wtedy na pewno wśród losów będzie jeszcze ten wygrywający – nikt nie zdąży mi go odebrać. Kto inny się nie zgodzi i będzie chciał stać z tyłu kolejki, mówiąc, że osoby stojące z przodu wyciągną raczej puste losy (bo takich jest przecież więcej), a wtedy to właśnie on będzie miał większe szanse wygrać.

Matematyk odpowiada na to pytanie tak: nie ma znaczenia, gdzie się ustawimy. Ostatecznie chodzi tu o losowy wybór, jak się uczenie mówi, jakiejś permutacji zbioru dziesięcioelementowego, czyli w tym konkretnym przypadku jednego z możliwych sposobów rozdania 10 losów dziesięciu osobom; jest tych sposobów $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1$; z uwagi na symetrię całej sytuacji nie ma najmniejszego powodu, żeby któryś z nich wyróżniać – podobnie jak nie ma żadnego powodu, żeby podczas gry w brydża uznawać, że los (i karta) sprzyja tej parze, która siedzi na linii równoległej do wanny.

Oto inny przykład: cztery osoby, panowie Abacki, Babacki, Cabacki i Dabacki, spotykają się często na brydżu i za każdym razem rzucają dwukrotnie monetą, by ustalić, kto robi wszystkim kawę i herbatę. Jeśli wypadną dwa orły, do kuchni idzie Abacki, jeśli najpierw reszka, a potem orzeł – Babacki, jeśli najpierw orzeł, a potem reszka – Cabacki, jeśli zaś dwie reszki – wtedy napoje szykuje Dabacki. Panowie słusznie uważają, że wyniki losowania nikogo nie faworyzują: cztery wyniki dwóch rzutów symetryczną monetą są przecież równoprawdopodobne.

Pewnego razu Cabacki i Dabacki nie przychodzą na umówione spotkanie; Abacki z błyskiem w oku proponuje grę w szachy zamiast brydża i dopasowaną do nowej sytuacji metodę losowania osoby robiącej napoje: należy rzucać monetą, aż w końcu w którychś dwóch kolejnych rzutach pojawi się OO lub RO; w pierwszej sytuacji zgodnie z dawnym obyczajem do kuchni pójdzie Abacki, a w drugiej – Babacki.

Być może Czytelnicy byliby skłonni uznać, że jest to sprawiedliwa metoda losowania i argumentować, że w dwóch rzutach wyniki OO oraz RO pojawiają się z równym prawdopodobieństwem. To drugie istotnie jest prawdą, natomiast to pierwsze wcale nie. Przecież jeśli za pierwszym razem wypadnie reszka, to nie ma po co rzucać dalej: wynik jest jasny, nie został tylko formalnie przypieczętowany – po pierwszym orle, niezależnie od tego, ile przed nim wypadnie reszek, do kuchni pofatyguje się Babacki. Jeśli zaś w pierwszym rzucie, jak to średnio w połowie przypadków bywa, wypadnie orzeł, to wtedy zdecyduje drugi rzut, z równym prawdopodobieństwem wskazując jednego z panów.

Ostatecznie więc Abacki będzie parzył kawę i herbatę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a Babacki – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Wielu osobom ten wynik wydaje się zaskakujący: było sprawiedliwie, odrzuciliśmy dwóch graczy i przestało być sprawiedliwie. Cóż, okazuje się, że to możliwe. Jeśli ma być sprawiedliwie, a przy tym prosto, trzeba rzucić monetą tylko raz.

Na koniec przykład trzeci: pewien zawodnik uczestniczy w turnieju, w którym gra się w pewną bezremisową grę (np. w tenisa) i aby zakwalifikować się do finału, musi wygrać przynajmniej jedną partię z Mistrzem, z którym wygrać jest trudno, i przynajmniej jedną partię z Szarakiem, z którym wygrać jest dość łatwo. Może rozegrać trzy mecze, zmieniając po każdym przeciwnika – będzie więc grał albo w układzie M–Sz–M, albo Sz–M–Sz. Który układ pojedynków jest korzystniejszy, jeśli założymy, że w meczu z Mistrzem nasz zawodnik wygrywa z ustalonym prawdopodobieństwem $p < \frac{1}{2}$, a w meczu z Szarakiem – z prawdopodobieństwem $q > \frac{1}{2}$? Przyjmujemy, że wyniki poszczególnych meczów są niezależne.

Wiele osób niemal automatycznie stwierdza, że korzystny jest układ Sz–M–Sz. Czyżby dlatego, że nie chcą się narażać Mistrzom i wolą wygrywać z Szarakami? W tym przypadku taka strategia zdecydowanie nie popłaca: z reguł turnieju jasno wynika, że aby wejść do finału, trzeba koniecznie wygrać środkowy z trzech meczów – lepiej więc rozgrywać go z łatwiejszym przeciwnikiem. Ponadto, z Mistrzem też trzeba choć raz wygrać – lepiej więc mieć do dyspozycji dwie próby niż jedną. Mniejsza o konkretny wynik, choć nietrudno obliczyć, że grając mecze w układzie M–Sz–M zawodnik wejdzie do finału z prawdopodobieństwem $pq(2-p)$, a w układzie Sz–M–Sz – z prawdopodobieństwem $pq(2-q)$. Skoro $p < q$, zatem $2-p > 2-q$, a stąd $pq(2-p) > pq(2-q)$, co się zgadza z przytoczonym zdroworozsądkowym rozumowaniem. Układ Sz–M–Sz byłby oczywiście korzystny, gdyby trzeba było wygrać co najmniej dwa mecze wszystko jedno z kim.

W rachunku prawdopodobieństwa, jak zresztą we wszystkich innych działach matematyki, lepiej więc nie myśleć pochopnie i zbyt szybko; lepiej też nie dokładać do rozwiązywanych zadań założeń, których wcale nie ma i być nie powinno.

Małą Deltę przygotowali: Edward STACHOWSKI i Paweł STRZELECKI

Zadania

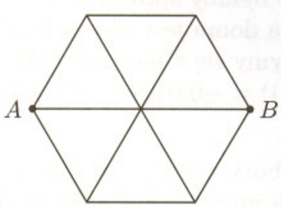
Przygotował Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 901. Udowodnić, że niezależnie od tego, jaką strategię obierze przeciwnik, można z prawdopodobieństwem większym od 1/2 wygrać grę, w której nasz przeciwnik zapisuje na dwóch kartkach papieru dwie dowolne (ale różne) liczby całkowite, my zaś losujemy jedną z tych kartek, odczytujemy zapisaną liczbę i mamy odgadnąć, czy liczba na drugiej kartce jest większa, czy mniejsza. (Zadanie zaproponował Rafał Latała.)
Rozwiązanie na str. 15

M 902. Załóżmy, że w pięćdziesięciu kolejnych rzutach monetą wypadła reszka. (Czytelnicy, którzy oglądali film „Guildenstern i Rosenkrantz nie żyją", spotkali się już z taką sytuacją). Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania reszki w następnym rzucie?
Rozwiązanie na str. 17

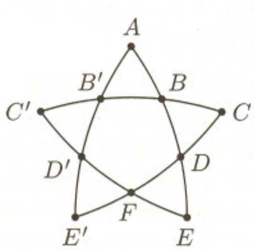
M 903. W wielkim nieprzezorczystym pudle znajduje się nieznana liczba piłeczek pingpongowych. Przez otwór na szczycie pudła wyciągamy po omacku 10 piłeczek; malujemy pięć z nich na zielono, a pięć na czerwono, po czym wrzucamy je z powrotem. Po dokładnym wymieszaniu zawartości pudła znów wyciągamy z niego 10 piłeczek, w tym dokładnie jedną zieloną i jedną czerwoną. Jak na tej podstawie oszacować, ile piłeczek zostało jeszcze w pudle?
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 513. Znaleźć opór R przewodników rozgałęzienia między punktami A i B (rys. 1), jeżeli każdy z przewodników wchodzących w skład rozgałęzienia ma opór r.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 514. Pięć jednakowych prętów miedzianych, każdy o długości l, zostało połączonych na kształt gwiazdy (rys. 2). Punkty połączenia każdego pręta dzielą go na trzy równe części ($AB = BD = DE = \dots$). Wyznaczyć opór tej figury między punktami A i F. Powierzchnia przekroju poprzecznego pręta wynosi S, opór właściwy miedzi jest równy ρ.
Rozwiązanie na str. 11