od tego, w której chwili mamy pewność, że cząstka istnieje, a prawo rozpadu promieniotwórczego mówi nam jedynie o tym, że będzie ono o połowę mniejsze po każdym przedziale czasu $T_{1/2}$.

Prawo rozpadu promieniotwórczego jest więc odbiciem faktu, że hipotetyczne rozpady w poszczególnych przedziałach czasu są niezależne. Dlatego prawdopodobieństwa rozpadu mnożą się, kiedy dodajemy przedziały czasu.

Uniwersalność prawa rozpadu promieniotwórczego polega na tym, że można je stosować do dowolnych nietrwałych obiektów mikroświata. Dla każdej cząstki wystarczy wziąć pod uwagę jej własny czas połowicznego rozpadu, a więc trzeba jedynie zmienić skalę na rysunku 2. Dla przykładu, pokazano tam też prawa rozpadu promieniotwórczego neutronu swobodnego ($T_{1/2} \sim 10$ min.) i jądra ^{8}Be, czyli izotopu berylu o 4 protonach i 4 neutronach ($T_{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-17}$ s). Jedna wspólna krzywa opisuje wszystkie prawdopodobieństwa rozpadu; wystarczy patrzeć na różne osie czasowe.

Wróćmy do rozpadu nabytego uprzednio pojedynczego protonu. Po czasie równym wiekowi Wszechświata (około 10^{10} lat) prawdopodobieństwo jego rozpadu jest rzędu zaledwie $T/T_{1/2} \sim 10^{-20}$. Gorzej jest, gdy spojrzy się na Wszechświat jako całość. We Wszechświecie jest podobno około 10^{80} protonów, więc od narodzin Wszechświata mogło się już było rozpaść około 10^{60} z nich. A tego jest już całkiem sporo – tak około tysiąca Słońc!

Kolektywy i miary

Prawdopodobieństwo według von Misesa i Kołmogorowa

Andrzej DĄBROWSKI

Niemożliwość przewidzenia zjawisk, nazwanych losowymi, była, według koncepcji uczonych XVIII wieku, skutkiem olbrzymiej liczby nie do końca poznanych przyczyn. Wyrazem tego pesymizmu była *zasada równomożliwości*: skoro nie umiemy opisać w pełni mechanizmu powstawania wyników przeprowadzanego eksperymentu, to uznajemy te wyniki za jednakowo możliwe. Z tej zasady Pierre Simon Laplace (1749–1827) wyprowadził definicję prawdopodobieństwa, zwaną do dziś definicją klasyczną Laplace'a. W dziele *Théorie analytique des probabilitées*, wydanym w 1812 roku, przyjął założenie, że możliwych wyników elementarnych (czyli czegoś w rodzaju atomów) jest skończenie wiele i skoro są z założenia jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych, zawartych w tym zdarzeniu, do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Zasada ta po raz pierwszy pojawiła się w pracy *Ars Conjectandi* Jakuba Bernoulliego, wydanej po jego śmierci w 1713 r.

Rachunek prawdopodobieństwa wzbogacił się w XIX wieku o nowe fakty i o nowe metody. Znaczące wyniki uzyskali: Gauss, Poisson, Czebyszew, Poincaré i inni. Ale od czasów Laplace'a nie uczyniono istotnego postępu w podstawach tej teorii. W dalszym ciągu nie było wiadomo, czym jest prawdopodobieństwo zdarzeń, gdy wyników elementarnych doświadczenia jest nieskończenie wiele.

Nauki przyrodnicze, głównie fizyka, dostarczały faktów doświadczalnych, których wyjaśnienie wymagało zaangażowania teorii prawdopodobieństwa na poziomie, odpowiadającym standardom teorii aksjomatycznych, obowiązujących na początku XX wieku. Nie może więc dziwić, że w odczycie Dawida Hilberta na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków, który odbywał się w Paryżu w roku 1900, wśród zagadnień kluczowych w rozwoju matematyki XX wieku znalazł się postulat aksjomatyzacji teorii prawdopodobieństwa.

Pierwsze próby aksjomatyzacji prawdopodobieństwa z 1909 roku pochodziły od matematyka francuskiego, Emila Borela (1871–1956) i dotyczyły teorii prawdopodobieństwa w eksperymentach, których wyniki elementarne da się ustawić w ciąg (a więc zbiór wyników jest przeliczalny).

Prawdziwą burzę wywołały jednak prace nad podstawami teorii prawdopodobieństwa profesora Uniwersytetu Berlińskiego, Richarda von Misesa, opublikowane w roku 1919. O powodach podjęcia takiego wyzwania pisał w swojej książce (*Kleines Lehrbuch des Positivismus*) poświęconej pozytywizmowi: *Pozytywizm nie oznacza, że na wszystkie pytania można odpowiedzieć racjonalnie, tak jak medycyna nie opiera się na obietnicy, że wszystkie choroby są uleczalne, ani tak jak fizyka nie postuluje, że wszystkie*

Richard von Mises urodził się 19 kwietnia 1883 roku we Lwowie. Był wszechstronnym matematykiem, specjalistą z zagadnień statystyki i teorii prawdopodobieństwa, fizykiem i filozofem. W wieku 26 lat został profesorem zastosowań matematyki w Strasburgu, gdzie pozostał do 1918 roku; podobne stanowisko zajmował w Berlinie w latach 1920–1933. Zmuszony przez hitlerowców do opuszczenia kraju, najpierw zatrzymał się w Stambule, aby wyemigrować do USA w 1939 roku, gdzie otrzymał stanowisko profesora na Uniwersytecie Harvarda. Był entuzjastą i wybitnym teoretykiem lotnictwa, specjalistą mechaniki płynów, aerodynamiki i aeronautyki. Jego dzieło *Theory of Flight* jest nadal wydawane. Pierwszy uniwersytecki wykład z teorii lotów silnikowych wygłosił w roku 1913. W roku 1915 skonstruował 600-konny samolot silnikowy, który pilotował podczas I wojny światowej jako oficer armii austriackiej. Zmarł 14 lipca 1953 roku w Bostonie.

zjawiska da się objaśnić. Ale możliwość, że może nie być odpowiedzi na jakieś pytania, nie jest wystarczającym powodem, aby nie poszukiwać wyjaśnień albo nie używać tych, które są osiągalne.

Venn jest powszechnie znany z wynalazku *diagramów Venna*.

Z takim też nastawieniem Richard von Mises przystąpił do budowania teorii prawdopodobieństwa. Wielki wpływ na jego koncepcje miały prace logika angielskiego, Johna Venna (1834–1923), od którego zapożyczył pomysł granicy częstości i losowego ciągu zdarzeń.

Von Mises rozpoczyna swoje rozumowanie od krytyki definicji Laplace'a. Jak można określić prawdopodobieństwa uzyskania wyników na fałszywej kości? Albo: w jaki sposób obliczyć prawdopodobieństwo przeżycia kolejnych 5 lat przez 80-latka? Odpowiedzi na te pytania w definicji Laplace'a nie ma.

Odpowiedź von Misesa jest oczywista: należy przeprowadzić serię doświadczeń z kością i **wyliczyć** prawdopodobieństwo z tej serii. Podobnie, należy obserwować wszystkich 80-latków (w tym celu trzeba jakoś tych ludzi uporządkować) i wyliczyć prawdopodobieństwo przeżycia kolejnych 5 lat. A jak wyliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia? Po prostu: dla każdego n obliczyć częstość pojawienia się tego zdarzenia w serii n pierwszych doświadczeń, a następnie wyliczyć granicę tych częstości, gdy n zmierza do nieskończoności.

Częstość jest stosunkiem liczby doświadczeń, w których wystąpiło dane zdarzenie, do liczby doświadczeń.

Matematykowi natychmiast nasuwa się pytanie: czy taka granica zawsze istnieje? I gdybyśmy od nowa przeprowadzili serię doświadczeń, to czy nowa granica częstości byłaby taka sama, jak w poprzedniej serii? Przecież mamy do czynienia z ciągiem *przypadkowych* wyników, więc i serie muszą być różne. Von Mises rozcina ten węzeł gordyjski, zakładając, że interesują nas tylko takie doświadczenia, w których granica częstości istnieje.

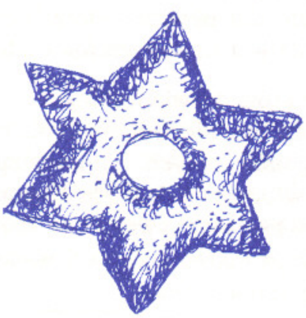
Jest to *prawo wielkich liczb*, udowodnione przez Jakuba Bernoulliego w 1692 roku.

Doświadczenia wzajemnie na siebie nie wpływają i są przeprowadzone w tych samych warunkach.

Podobne sytuacje zdarzają się w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa, gdzie częstości zbliżają się do pewnej stałej (czyli prawdopodobieństwa zdarzenia), ale za cenę specyficznego sposobu przeprowadzania doświadczeń. Tak więc von Mises uzupełnia założenie istnienia granicy częstości o warunek losowości ciągu wyników.

W grach hazardowych ciąg wypłat może być uważany za losowy, jeśli nie istnieje strategia wygrywania, czyli takiego wyboru momentów przystąpienia do gry, który prowadziłby do zwiększenia prawdopodobieństwa wygranej.

Te ogólnikowe postulaty von Mises uściśla, wprowadzając pojęcie kolektywu.



Kolektyw jest to nieskończony ciąg elementów, z których każdemu jest przypisana etykieta, będąca elementem ustalonego zbioru etykiet. Muszą być co najmniej dwie etykiety, które są przypisane nieskończonej liczbie elementów kolektywu.

Własności kolektywu opisują dwa postulaty:

1. *Istnienie granic*. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru etykiet (zdarzeniem). Istnieje wtedy granica W_A częstości zdarzenia A, zwana prawdopodobieństwem: $W_A = \lim n_A/n$, gdzie n_A jest liczbą elementów kolektywu, występujących na n pierwszych miejscach i opatrzonych etykietami ze zbioru A.
2. *Nieregularność*. Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami etykiet o prawdopodobieństwach W_A i W_B w kolektywie K. Usuńmy z K te elementy, które nie należą ani do A, ani do B. Z otrzymanego podciągu wybieramy jeszcze raz podciąg K', ale w sposób niezależny od etykiet. W kolektywie K' istnieją prawdopodobieństwa W'_A i W'_B oraz zachodzi wzór $W'_A/W'_B = W_A/W_B$.

Gdy B jest dopełnieniem A, to z warunku nieregularności wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia A w podkolektywie jest równe prawdopodobieństwu tego zdarzenia w kolektywie.

Warunek nieregularności stanowi kościec teorii von Misesa. Na przykład, wynika z niego możliwość obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia na podstawie cząstkowych obserwacji – jest to podstawa szacowania prawdopodobieństw w statystyce.

W praktycznej interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa i w jego zastosowaniach przyjęty został powszechnie punkt widzenia von Misesa.

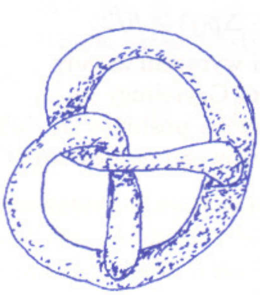
Praktycy nie widzieli istotnej rozbieżności między tym, co ona głosiła, a tym, co sami obserwowali. Poszukiwanie prawdopodobieństwa tylko w jednym kolektywie jest odzwierciedleniem sytuacji, że ciąg etykiet, który obserwujemy, jest jedyną realizacją procesu losowego i w praktyce nie są możliwe żadne powtórzenia. Założenie o nieskończonej długości ciągu etykiet w kolektywie jest potwierdzeniem możliwości wnioskowania z coraz dłuższego ciągu obserwacji. Przeciwnicy teorii uważali, że ten postulat jest nierealistyczny, bo przecież nie jest możliwe, aby prowadzić obserwacje nieskończenie długo.

Zwolennicy teorii von Misesa odpowiadali wtedy, że równie nierealistycznie jest mówić o prostych, które przecież w rzeczywistości nie istnieją.

Niestety, warunek nieregularności sformułowany jest niejasno, szczególnie, gdy mowa o sposobach wyboru podkolektywu. Dla matematyka pierwszy wariant teorii był nie do przyjęcia – był logicznie sprzeczny i nie zawierał aksjomatów. Sam von Mises nie uznawał braku aksjomatów za mankament. Pełny wykład jego teorii, zawarty w prawie 600-stronicowej monografii wydanej w 1931 roku, opracowany przez jego żonę, Hildę Geiringer, zawierał już układ aksjomatów, sporządzony przez jego zwolenników. Teoria von Misesa spotkała się z oporem środowiska matematycznego. W swoich wspomnieniach z Getyngi z lat 30. algebraik Saunders MacLane pisze, że odczyt o teorii kolektywów, wygłoszony przez von Misesa przed takimi autorytetami jak Hilbert, Bernays i Bernstein, zakończył się miażdżącą krytyką pomysłów prelegenta.

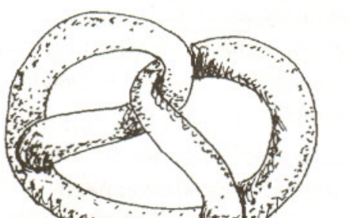
Stosunek do teorii von Misesa ewoluował. Najpierw odrzucono podejrzenie, że kolektywy w ogóle nie istnieją. Wybitny statystyk Abraham Wald w swojej pracy z 1937 roku pokazał, że precyzując pojęcie wyboru podkolektywu, można udowodnić, że kolektywy istnieją. Co więcej, pokazał on, że prawdopodobieństwo w sensie von Misesa istnieje dla bardzo ogólnej klasy zbiorów. Istnieje też nieskończenie wiele kolektywów, w których prawdopodobieństwo danego zdarzenia ma tę samą wartość. Z drugiej jednak strony okazało się, że są zdarzenia, których prawdopodobieństwa w teorii von Misesa nie da się obliczyć (prawdopodobieństwo von Misesa nie jest addytywne!). Nie można, na przykład, w teorii von Misesa rozstrzygnąć, czy z prawdopodobieństwem 1 ciągi częstości są zbieżne do stałej (nie ma w niej mocnego prawa wielkich liczb).

Założenie nieregularności wymusza niekonstruktywność kolektywu, w przeciwnym przypadku wybór podkolektywu musiałby zależeć od etykiet, a to jest niemożliwe.



Trudności w zdefiniowaniu nieregularności w kolektywach były jedną z przyczyn zajęcia się przez Andrieja Kołmogorowa teorio-miarową aksjomatyką rachunku prawdopodobieństwa. Czytając monografię Kołmogorowa z 1933 roku (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*), można jednak zauważyć, jak wiele idei von Misesa jest tam zawartych. W rozdziale zatytułowanym *Związek ze światem eksperymentu* Kołmogorow skodyfikował zasady stosowania metod probabilistycznych, wyrażając je w duchu teorii von Misesa.

W swojej długoletniej aktywności naukowej Kołmogorow wielokrotnie nawiązywał do pomysłów von Misesa, przyznając, że w latach 30. nie poruszał problemu zastosowań prawdopodobieństwa, gdyż nie wiedział, jak ten problem rozwiązać. Pozostał jednak wierny swoim poglądom, że zdefiniowanie prawdopodobieństwa jako granicy ciągu częstości jest „matematyczną fikcją i nie może mieć praktycznego znaczenia".



Jeszcze jedną próbę ożywienia teorii von Misesa podjął sam Kołmogorow we wczesnych latach 60. Tym razem zajął się ścisłym zdefiniowaniem pojęcia losowości, które w teorii von Misesa było wyrażone w postaci założenia o nieregularności. Definicja Kołmogorowa, oparta na teorii automatów, uznawała ciąg za losowy, jeśli ma maksymalną złożoność. Mówiąc inaczej, ciąg losowy to taki, którego nie da się nauczyć na pamięć. Współpracownik Kołmogorowa, Martin-Löf, udowodnił w 1971 roku, że dla ciągów losowych istnieje granica częstości, czyli, co było wynikiem nieoczekiwanym, że z założenia nieregularności (w wersji Kołmogorowa) wynika założenie istnienia granic w kolektywach.

Obecny stosunek specjalistów do teorii von Misesa można porównać do stosunku do martwego języka, którym z jakiegoś powodu nikt nie chce mówić, ale – po odpowiednich poprawkach i zmianach – w pełni można by było powiedzieć wszystko, co się mówi w żywym języku.

Cytat z podręcznika rachunku prawdopodobieństwa Tutubalina.