Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 2000

Zadania z matematyki nr 391, 392

Redaguje Marcin E. KUCZMA

391. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie T. Niech X będzie dowolnym punktem na boku BC (różnym od B i C). Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty BXT, TXA, AXC mają wspólną prostą styczną.

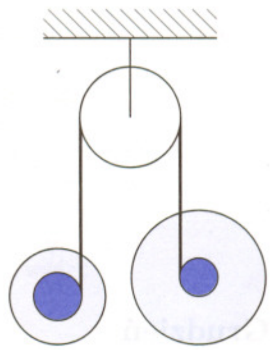
392. Dane są liczby całkowite x, y, z o tej własności, że liczba $x^{666}+y^{666}-z^{666}$ dzieli się przez 1999. Dowieść, że co najmniej jedna z liczb x, y dzieli się przez 1999.

Zadanie **392** na pożegnanie roku 1999 zaproponował pan Krystian Bartniczek z Würselen.

Zadania z fizyki nr 288, 289

Redaguje Jerzy B. BROJAN

288. Zabawka „jojo" składa się z dwóch jednorodnych walców o promieniu R_1 i łącznej masie m_1, połączonych ośką – walcem o promieniu r_1 i bardzo małej masie. Dla drugiej takiej zabawki analogiczne parametry są równe R_2, m_2 i r_2. Na ośkach nawinięto końce długiej nici, którą przełożono przez blok (rysunek), po czym oba „joja" puszczono. Jeśli masę bloku i tarcie w jego osi można pominąć, to jaki związek muszą spełniać wymienione parametry, aby „joja" spadły z tej samej wysokości w ciągu tego samego czasu?



289. Mamy dwa kilogramy wody A o temperaturze 0°C i jeden kilogram wody B o temperaturze 100°C. Jaka jest maksymalna temperatura, do której możemy ogrzać wodę A, korzystając z ciepła dostarczonego przez wodę B? Rozważyć dwa warianty zadania:
a) Możemy dzielić każdą wodę na dowolną liczbę części, wlewać do naczyń umożliwiających wymianę ciepła (bez mieszania) i ponawiać te czynności dowolną liczbę razy. Na końcu należy zlać całą wodę A do jednego naczynia – temperatura po jej wyrównaniu jest wielkością szukaną.
b) Oprócz czynności wymienionych wyżej możemy użyć silnika cieplnego korzystającego z wody gorącej jako grzejnika, a z zimnej jako chłodnicy. Pracę tego silnika można zmagazynować i zużytkować w dowolny sposób, np. do napędu chłodziarki oziębiającej jedną wodę, a ogrzewającej inną.
Ciepło właściwe wody uznajemy za stałe.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 379 (WT=1,37) i 380 (WT=2,40) z numeru 4/1999

Tadeusz Józefczyk	– Poznań	44,59
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,18
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,51

W matematycznym **Klubie 44** mamy już dwudziestu Weteranów! Pan Józefczyk pokonał był czterdziestoczteropunktowy limit już dwukrotnie (ostatni raz jedenaście lat temu), po czym zmniejszył częstość przesyłania rozwiązań, nie dając jednak o sobie zapomnieć; parę miesięcy temu miał na koncie w kolejnej rundzie 42,19 p. – i oto autorstwo zadania konkursowego dało trzecią „gwiazdkę" i status dwudziestego Weterana **Klubu 44 M**.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 278 (WT=1,81) i 279 (WT=2,50) z numeru 5/1999

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	40,90
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,84
Aleksander Surma	– Myszków	25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	18,71
Jarosław Łazuka	– Warszawa	16,49
Marek Wójcicki	– Szczecin	13,23
Grzegorz Miłoś	– Mielec	13,22
Tomasz Rudny	– Warszawa	12,73

Rozwiązanie zadania M 901.

Zauważmy, że gdyby to przeciwnik decydował, którą z liczb mamy poznać, mógłby ograniczyć nasze szanse zwycięstwa do 1/2, np. wybierając z prawdopodobieństwami równymi 1/2 pary (1,2) oraz (2,3), i pokazując nam zawsze kartkę z liczbą 2. Z drugiej strony, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik, mamy 50% szans na zwycięstwo: wystarczy z prawdopodobieństwem 1/2 mówić, że na drugiej kartce jest liczba większa, a z prawdopodobieństwem 1/2 – że mniejsza.

Oto strategia dająca większe prawdopodobieństwo wygranej. Niech $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem liczb z przedziału $(0,1)$, np. $c_k = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{\pi}$. Gdy wylosujemy kartkę z liczbą k, z prawdopodobieństwem c_k mówimy, że liczba z drugiej kartki jest mniejsza od k, a z prawdopodobieństwem $1-c_k$ – że większa.

Jeśli $p_{m,n}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że przeciwnik zapisał na kartkach liczby m i n, przy czym $m>n$, to prawdopodobieństwo naszej wygranej jest równe:

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m>n}} p_{m,n}\left(\frac{1}{2}c_m + \frac{1}{2}(1-c_n)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m>n}} p_{m,n}(c_m - c_n) > \frac{1}{2},$$

bo przynajmniej jedna z liczb $p_{m,n}$ musi być dodatnia (jako że w sumie dają 1), a $c_m > c_n$ dla $m>n$.

Wnikliwy Czytelnik zechce się zastanowić, jakie prawdopodobieństwo wygranej możemy sobie zapewnić, jeśli przeciwnik ma prawo wybierać tylko liczby ze zbioru $\{1,2,\ldots,100\}$.