MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (19′)

Wyjaśnienie oszustwa (19): Oszustwo polega na wykonywaniu manipulacji, które, jak się intuicyjnie wydaje, zwiększają wartość oczekiwaną wygranej Bazylego, ale prowadzą od wygranej dodatniej do ujemnej. Wartość oczekiwana nie jest w żadnym momencie liczona, ale wyjaśnienie sprawia wrażenie, że możemy określić jej znak.

W sytuacji wyjściowej (losowanie stawki, a potem zwycięzcy) wartość oczekiwana dana jest w postaci szeregu

$$\left(\frac{20}{4}-\frac{10}{4}\right)+\left(\frac{200}{8}-\frac{100}{8}\right)+\left(\frac{2000}{16}-\frac{1000}{16}\right)+ \\ +\left(\frac{20000}{32}-\frac{10000}{32}\right)+\ldots=$$

$$=(5-2{,}5)+(25-12{,}5)+(125-62{,}5)+(625-312{,}5)+\ldots$$

Szereg ten można by uznać za rozbieżny (ale ani do $-\infty$, ani do $+\infty$), gdyby nie scenariusz gry, który nakazuje nam umieszczenie nawiasów w sposób sugerujący rozbieżność szeregu do $+\infty$.

Pierwsza modyfikacja gry zaproponowana przez Ambrożego polega na **zmianie kolejności** wyrazów szeregu, co przy szeregach rozbieżnych nie jest bezpieczne. Otrzymujemy różnicę 2 szeregów

$$(5+25+125+625+\ldots)-(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Jest to wyrażenie $\infty-\infty$, choć optycznie pierwsza nieskończoność jest dwa razy większa od drugiej.

Prześledźmy dalsze modyfikacje zasad gry i ich wpływ na postać sumy mającej wyrażać wartość oczekiwaną.

Postawienie przez Ambrożego **3 stawek** w sytuacji, gdy wygrał Bazyli. Otrzymujemy

$$((6{,}25+0)+(31{,}25+0)+(156{,}25+0)+(781{,}25+0)+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Przeniesienie losowania *5 stawek czy 0* przed losowanie stawki daje

$$((0+0+0+0+\ldots)+(6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots))- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)=$$

$$=(0+6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Zaoferowanie wypłaty pocieszenia 5 przez Ambrożego w sytuacji, gdy Bazyli wygrywa zerowe losowanie, a przegrywa pierwsze. Mamy

$$(1{,}25+6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Zwrócenie uwagi na fakt, że obydwa powyższe szeregi odzwierciedlają tę samą procedurę losowania stawki, daje szereg, który wygląda ujemnie

$$(1{,}25-2{,}5)+(6{,}25-12{,}5)+(31{,}25-62{,}5)+\ldots$$

Patrząc na powyższe manipulacje, widzimy, że wychodząc od szeregu o sumie $+\infty$ i zwiększając lub przestawiając jego wyrazy, dochodzimy do szeregu o sumie na pozór ujemnej. Ponieważ szereg jest rozbieżny (i ma dowolnie duże wyrazy dodatnie i ujemne), takie operacje i wnioskowania są błędne.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (12″)

Pan Lech Wołowski zwrócił moją uwagę na pewną niefrasobliwość w wyjaśnieniu oszustwa 12 w Γ-limatiasie 14.

Napisałem tam, że wartość oczekiwana wygranej Bazylego wynosi

$$w=-2+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}-\frac{20}{6}+ \\ +\frac{10}{36}+\frac{20}{36}+\frac{30}{36}+\frac{40}{36}+\frac{50}{36}-\frac{200}{36}+ \\ +\frac{100}{216}+\frac{200}{216}+\frac{300}{216}+\frac{400}{216}+\frac{500}{216}-\ldots,$$

gdy tymczasem p. Wołowski podaje wzór

$$w=-\frac{1}{6}+\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}- \\ -\frac{12}{36}-\frac{2}{36}+\frac{8}{36}+\frac{18}{36}+\frac{28}{36}-\frac{122}{216}-\ldots$$

Jeśli bowiem Bazyli wyrzucił kolejno: 6, 6, 3, to wpłacił Ambrożemu 2, potem 20 i 200 zł, a na końcu dostał 300. W podanym przeze mnie wzorze te cztery kwoty występują w czterech różnych miejscach. U p. Wołowskiego są połączone w jeden ułamek $\frac{-2-20-200+300}{216}=\frac{78}{216}$ i to jest poprawne, gdyż te cztery wypłaty dotyczą jednego zdarzenia. Nie zmienia to faktu, że szereg opisujący wartość oczekiwaną jest rozbieżny.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

Rozwiązanie zadania M 902.

Pytanie jest niejasne. Jeśli wiadomo, że moneta jest symetryczna, to wyniki 50 poprzednich rzutów nie mają nic do rzeczy i gdy rzucimy jeszcze raz, reszka wypadnie z prawdopodobieństwem równym 1/2.

Wprawdzie symetryczną monetą można teoretycznie, choć bardzo rzadko, wyrzucić 50 kolejnych reszek, lecz np. na monecie, która ma dwie reszki, orzeł nie wypadnie nigdy. Ilościowe rozstrzygnięcie, w jakim stopniu z wyrzucenia 50 reszek pod rząd wynika, że za 51 razem też wypadnie reszka, wymaga większej liczby danych lub uczynienia założeń wykraczających poza matematykę. W deterministycznym świecie sztuki teatralnej, w którym znajdowali się Guildenstern i Rosenkrantz, nie było miejsca na przypadek i pytanie o wynik kolejnego rzutu miałoby podobny sens, co pytanie o to, czy jutro wzejdzie słońce, skoro wschodziło przez ostatnie 50 dni.

Wnikliwy Czytelnik zechce rozwiązać następujące zadanie: jeśli wiadomo, że $n\%$ monet znajdujących się w obiegu ma po obu stronach reszkę, a wszystkie pozostałe monety są symetryczne, i jeśli 50 kolejnych rzutów losowo pozyskaną monetą dało w wyniku reszkę, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w 51 rzucie też wypadnie reszka? Czy odpowiedź zależy od parametru n?