Jeszcze raz o nierównych średnich

Piotr GOLDSTEIN

Na łamy *Delty* wraca od czasu do czasu temat nierówności między średnią arytmetyczną, $A_n = (a_1 + \ldots + a_n)/n$, a geometryczną, $G_n = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}$, gdzie a_i $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ są dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, a n jest liczbą naturalną. Znane twierdzenie głosi, że po pierwsze

$$(1) \qquad A_n \geq G_n\,,$$

a po drugie, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_i są równe.

Pomysł sprzed lat (kiedyś nie spodobał mi się dowód podany na wykładzie, więc znalazłem własny) wciąż wydaje mi się prostszy od innych. Teraz dzielę się nim z Czytelnikami *Delty*. W dowodzie używa się, co prawda, nierówności Bernoulliego

$$(2) \qquad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \qquad \text{dla wszystkich } \alpha \geq -1 \text{ i } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 0$ lub $n = 1$ lub $\alpha = 0$), ale tę nierówność zna chyba każdy, kto uczył się zasady indukcji matematycznej – np. w podręczniku Anusiaka dla drugiej klasy liceum jej udowodnienie jest treścią jednego z zadań.

Przypadek, gdy któreś a_i jest równe zeru, jest banalny (Czytelnik sam domyśli się, dlaczego), więc nierówność (1) udowodnimy przy założeniu, że wszystkie a_i są dodatnie. Wtedy, oczywiście, obie rozważane średnie też są dodatnie.

A oto dowód (1) przez indukcję.
1. Dla $n = 1$ jest $A_1 = a_1 = G_1$.
2. Załóżmy, że dla pewnej liczby $k \geq 1$ zachodzi nierówność $A_k \geq G_k$. Mamy wtedy

$$(3) \qquad \begin{aligned} (A_{k+1})^{k+1} &= \left(\frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \\ &= \left(\frac{k}{k+1}A_k + \frac{a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = (A_k)^{k+1}(1+\alpha)^{k+1}\,, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $\alpha = a_{k+1}/[(k+1)A_k] - 1/(k+1)$. Liczba α spełnia założenia nierówności Bernoulliego, $\alpha \geq -1$, bo pierwszy składnik jest nieujemny, a drugi równy co najmniej $-1/2$. Na mocy nierówności Bernoulliego prawa strona (3) spełnia warunek

$$(4) \qquad (A_k)^{k+1}(1+\alpha)^{k+1} \geq (A_k)^{k+1}(1 + (k+1)\alpha) = (A_k)^k a_{k+1}\,.$$

Z założenia indukcyjnego mamy więc

$$(5) \qquad (A_{k+1})^{k+1} \geq (G_k)^k a_{k+1} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = (G_{k+1})^{k+1}\,.$$

Ponieważ A_{k+1} i G_{k+1} są dodatnie, z nierówności (5) wynika ostatecznie, że $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. Zasada indukcji daje tezę twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych n.

Nietrudno rozszerzyć ten dowód tak, by za jednym zamachem wykazać prawdziwość drugiej części twierdzenia. Do założenia indukcyjnego dołączamy jeszcze warunek: $A_k = G_k \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_k$. Nierówność Bernoulliego dla wykładników większych od 1 (takich, jak rozważane przez nas $k+1$) przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$, czyli gdy $a_{k+1} = A_k$. Razem oznacza to, że $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. Indukcja daje tezę.

Podstawy matematyki w wieku XX
2. Zbiory

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Część pierwsza tego artykułu ukazała się w *Delcie* 9/1999.

W roku 1900 odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyczny, na którym Hilbert wygłosił referat pt. „Problemy Matematyczne". Nadzwyczaj jasno Hilbert opisuje tam rolę matematyki i proces twórczości matematyka. Po owym interesującym wstępie autor przedstawia 23 otwarte problemy. Trzy z nich (nr 1, 2 i 10) dotyczą podstaw matematyki.

Problem nr 1 należał do teorii mnogości i pochodził od Cantora. Była to tak zwana hipoteza continuum (czy istnieją nieskończone zbiory liczb rzeczywistych, które nie są równoliczne ani ze zbiorem liczb naturalnych, ani z całym zbiorem liczb rzeczywistych). Problem nr 2 należał do logiki (czy układ aksjomatów arytmetyki lub analizy jest niesprzeczny), a problem nr 10 dotyczył teorii obliczalności (czy istnieje algorytm rozstrzygający istnienie całkowitych rozwiązań równań algebraicznych o współczynnikach całkowitych). Tak więc trzy wspomniane wyżej główne tematy podstaw pojawiły się już w wykładzie Hilberta.

Kwestia rozumienia pojęcia zbioru zajmowała (i zajmuje nadal) matematyków badających podstawy przez cały wiek XX. Naiwne podejście do tego pojęcia, zaproponowane przez Fregego i Russella (każda klasa, którą wymyślę, jest zbiorem), doprowadziło do sprzeczności, bowiem nieco później Russell zauważył, co następuje: rozpatrzmy klasę zbiorów R, którą we współczesnej notacji definiujemy: $\{x : x \notin x\}$. Zapytajmy, czy R jest zbiorem. Jeśli tak jest, to, zgodnie z formułą definiującą R, mamy natychmiast równoważność:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Zatem R nie może być zbiorem. Stało się jasne, że pojęcie zbioru musi zostać sprecyzowane tak, aby nie doprowadzało do sprzeczności. Nie oznacza to, że społeczność matematyczna (w szczególności Cantor) kiedykolwiek przyjmowała za prawdziwy schemat istnienia zbiorów proponowany przez Fregego (że każda klasa jest zbiorem).

Ten sprzeczny schemat ma postać $\exists x\, \forall y\ [y \in x \Leftrightarrow \varphi(y)]$, gdzie φ jest dowolną formułą języka teorii mnogości.

Niemniej jednak było jasne, że pojęcie zbioru wymaga dobrego opisu. Trzeba było coś zrobić, by pojęcie zbioru mogło służyć matematykom i z odpowiednią propozycją wyszedł Zermelo. W roku 1908 zbudował on układ aksjomatów opisujący zbiory i metody budowania zbiorów, przy czym aksjomaty nie pociągały za sobą wniosku, że klasa R jest zbiorem. Po pewnych ulepszeniach Skolema i Fraenkla wyłoniła się teoria mnogości Zermelo–Fraenkla, powszechnie dziś przyjęta aksjomatyzacja teorii mnogości i całej matematyki, zwana teorią ZFC.

Spośród aksjomatów tej teorii jeden budził zaniepokojenie niektórych matematyków, mianowicie aksjomat wyboru. Aksjomat ten mówi, że dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór (zwany selektorem) mający z każdym elementem owej rodziny dokładnie jeden element wspólny. Jest to uogólnienie oczywistej własności rodzin skończonych, ale jest ono nader niekonstruktywne. Jeśli bowiem myślimy o zbiorach jako tworach, które można konstruować z innych zbiorów za pomocą rozmaitych operacji, to zupełnie nie widać, jakie operacje konstruowałyby ów selektor, który – zgodnie z aksjomatem wyboru – ma istnieć. Dziś pogodziliśmy się z aksjomatem wyboru, który w rozmaitych formach (np. lematu Kuratowskiego–Zorna albo zasady dobrego uporządkowania) jest powszechnie używany. Niemniej jednak przyjęcie aksjomatu wyboru powoduje, że musimy też zaakceptować jego konsekwencje, na przykład paradoksalny rozkład kuli, sprzeczny z intuicjami fizycznymi. Na ogół konsekwencje aksjomatu wyboru są dalsze od zastosowań matematyki, niż twierdzenia, które obywają się bez tego aksjomatu.

Hipoteza continuum mówi, że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny lub jest równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych. Teoria mnogości z aksjomatem wyboru dowodzi, iż jest to równoważne temu, że rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma liczność $\aleph_1$ (tj. najkrótszego zbioru dobrze uporządkowanego i nieprzeliczalnego). Próby rozwiązania tego problemu doprowadziły do wielu interesujących wyników i wskazały na niezupełność dotychczasowego rozumienia pojęcia zbioru liczb rzeczywistych. K. Gödel w drugiej

Pewien komputer analogowy albo prawa przyrody w kieliszkach

Jan GAJ

Dawno, dawno temu, kiedy komputery nazywano mózgami elektronowymi, najlepsze z nich zajmowały całe hale i konsumowały prąd wystarczający do oświetlenia małego miasteczka. Mimo tych cieplarnianych warunków dysponowały pamięcią o kilka rzędów wielkości mniejszą i liczyły znacznie wolniej niż dostępny dziś średniej klasy pecet, co jest najlepszym argumentem na rzecz słuszności polityki naszych kolejnych rządów wobec sfery budżetowej: ograniczanie zasilania może iść w parze ze zwiększaniem wydajności. W tych to dawnych czasach oprócz maszyn cyfrowych istniały też, przede wszystkim w projektach, niesłusznie dziś zapomniane komputery analogowe, w których liczby są reprezentowane przez jakieś wielkości fizyczne, najczęściej elektryczne. Żeby nadrobić to karygodne zaniedbanie, proponuję dziś wycieczkę w krainę cieczy i naczyń. Wycieczka taka stanowi od pewnego czasu jedno z moich marzeń, a ostatnie opory przed jego realizacją pomogły mi usunąć coraz częściej spotykane reklamy piwa bezalkoholowego! Gdyby więc komuś wybujała wyobraźnia podpowiadała naganne skojarzenia, niech porzuci wszelką nadzieję: o napojach wyskokowych tu nie będzie. Żeby zrozumieć, jak działa komputer analogowy, rozważmy najpierw przykład najprostszy.

Kieliszek jako komputer jednowymiarowy

Odpowiedniego kształtu kieliszek może służyć do obliczania zadanej funkcji monotonicznej. Funkcją tą będzie objętość cieczy (oczywiście bezalkoholowej) w kieliszku, a argumentem – wysokość słupa cieczy. Żeby nasz przykład uczynić konkretniejszym, trzeba poszukać prawa przyrody opisywanego jakąś funkcją monotoniczną. Rozważmy na przykład prawo Stefana–Boltzmanna opisujące zależność natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego od temperatury:

$$I = \sigma T^4.$$

Za temperaturę przyjmiemy wysokość poziomu cieczy w kieliszku $T = \alpha H$ (z uwzględnieniem współczynnika α wyrażającego skalę), a natężeniem promieniowania będzie objętość tej cieczy $I = \beta V$ (ze współczynnikiem skalowania β). Musimy więc skonstruować kieliszek, w którym objętość będzie proporcjonalna do czwartej potęgi wysokości $V = \beta^{-1}\sigma\alpha^4 H^4 = AH^4$, gdzie $A = \beta^{-1}\sigma\alpha^4$ jest stałym współczynnikiem.

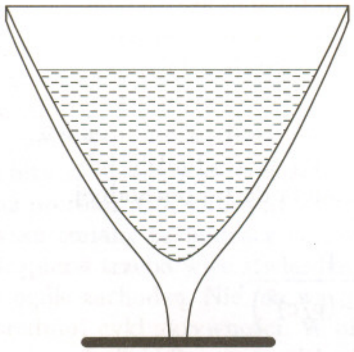
W przypadku kieliszka o symetrii obrotowej scharakteryzowanego zależnością promienia R od wysokości H objętość można wyrazić wzorem $V = \int\limits_0^H \pi R^2(h)\mathrm{d}h$, z którego wynika $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H} = \pi R^2$, a zatem $R = \sqrt{\pi^{-1}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}}$.

W naszym przypadku oznacza to proporcjonalność promienia do wysokości w potędze $3/2$, a więc kieliszek wyrażający prawo Stefana–Boltzmanna powinien wyglądać w przekroju tak, jak na powyższym rysunku.

Oczywiście, ważny jest tylko kształt wnętrza, reszta z punktu widzenia naszego wywodu nie ma żadnego znaczenia. Obliczanie natężenia promieniowania przy użyciu takiego kieliszka polegałoby na przelaniu do menzurki cieczy z kieliszka napełnionego do wysokości odpowiadającej temperaturze. Jeżeli ktoś nie lubi pierwiastkowania, może skonstruować „kieliszek" płaski, w którym warstwa cieczy o grubości d będzie ograniczona ściankami determinującymi szerokość b słupa cieczy zależną od wysokości h. W takim kieliszku objętość V w zależności od wysokości słupa cieczy H będzie opisana wzorem

$$V = d\int_0^H b(h)\mathrm{d}h.$$

Pozwala to, podobnie jak w poprzednim przypadku, wyliczyć szerokość b jako funkcję wysokości H dla żądanej zależności objętości od wysokości $b = d^{-1}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}$. Ostatni wzór ukazuje nam szczególną użyteczność kieliszka płaskiego do ilustracji praw przyrody, w których interesuje nas zarówno jakaś wielkość (reprezentowana przez V), jak i jej pochodna (jest do niej proporcjonalna szerokość kieliszka b).



W przypadku zależności kwadratowej (a więc pochodnej liniowo zależnej od argumentu) nie pomylmy się, kieliszek nie będzie miał kształtu stożka, powinien natomiast mieć promień proporcjonalny do pierwiastka z wysokości, a więc wyglądać, jak na rysunku obok.

Ostatni przykład podaję nie bez kozery, bo ilustruje nie tylko prostą zależność kwadratową (na przykład energii kinetycznej od prędkości). Świetnie nadaje się też do rozszerzenia naszych rozważań na przypadek dwuwymiarowy. Prawem, które również potrzebuje takiego kieliszka, a najlepiej dwóch, jest

Twierdzenie Pitagorasa

Jak wiemy, odnosi się ono do trójkąta prostokątnego i mówi, że suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej: $a^2 + b^2 = c^2$. Dysponując dwoma kieliszkami o kwadratowej zależności objętości od wysokości poziomu cieczy, wystarczy nalać do każdego z nich, na przykład, soku pomidorowego do wysokości odpowiadającej długości jednej z przyprostokątnych trójkąta, zlać zawartość obu kieliszków do jednego z nich, a wtedy odczytamy z wysokości poziomu soku długość przeciwprostokątnej. Łatwo zauważyć, że ten tryb postępowania można stosować wtedy, kiedy mamy do czynienia z dodawaniem pewnych funkcji wielkości, które nas interesują, według schematu $f(a) + f(b) = f(c)$. Na przykład energia całkowita układu dwóch identycznych kul jest proporcjonalna do sumy kwadratów ich prędkości. Dzięki temu można omawianą parę kieliszków wykorzystać także do przewidywania wyniku zderzenia sprężystego, w którym, jak wiadomo, energia kinetyczna się zachowuje, a więc zachodzi równość

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2,$$

gdzie dolny indeks numeruje kule, a prim odnosi się do sytuacji po zderzeniu. Trzeba tylko nalać cieczy do dwóch kieliszków

połowie lat 30. wykazał, że hipoteza continuum jest *niesprzeczna* z aksjomatyką teorii mnogości. Krok ten był podobny do innego, wcześniejszego rewolucyjnego wyniku Gödla – mianowicie dowodu niezupełności arytmetyki.

Technika użyta przez Gödla wiąże się z odwróceniem niejako obiekcji co do aksjomatu wyboru. Zamiast pytać, jak definiować zbiory, Gödel ogranicza zbiory do tych, które dadzą się skonstruować w trakcie (pozaskończonego) procesu, który pokrótce opiszemy poniżej. Postępujemy tak: definiujemy indukcyjnie „poziomy konstruowalne", tak że zbiory należące do kolejnego poziomu są definiowalne w strukturze złożonej z obiektów poprzedniego poziomu. Definicje są formułami, a formułom można przypisać kody będące liczbami naturalnymi. Teraz możemy już definiować dobry porządek zbiorów konstruowalnych. Postępujemy indukcyjnie. Wystarczy wskazać porządek kolejnego poziomu. Najpierw porządkujemy k-tki obiektów z poziomów poprzednich. Następnie zaś dany poziom porządkujemy według par: kod formuły, ciąg parametrów (z uprzednich poziomów). Wszystko to, wraz z dodatkowym faktem (wielce nietrywialnym), mianowicie tym, że elementarne podstruktury poziomów są same izomorficzne z poziomami, wystarcza do wykazania, iż wszystkie konstruowalne zbiory liczb naturalnych są skonstruowane w krokach o indeksach przeliczalnych. To już łatwo implikuje hipotezę continuum wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych. Jeszcze tylko musimy wykazać, że wszystkie aksjomaty ZFC są spełnione w uniwersum zbiorów konstruowalnych, ale to już jest łatwe. W szczególności aksjomatyka ZFC pozostaje niesprzeczna po dołączeniu hipotezy continuum. Co więcej, wszystkie zbiory konstruowalne (i tylko one) są konstruowalne wewnątrz uniwersum konstruowalnego. Tak więc wszelkie konsekwencje teorii ZFC i zdania mówiącego, że wszystkie zbiory są konstruowalne, są prawdziwe wewnątrz uniwersum zbiorów konstruowalnych. Wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych prawdziwa jest nawet *uogólniona* hipoteza continuum: dla każdej liczby porządkowej α jest $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Klasa L zbiorów konstruowalnych może być wzbogacona przez dodatkowe obiektywy, które mogą być używane w powyższej definicji indukcyjnej. Na przykład, jeśli dodamy wszystkie liczby rzeczywiste, otrzymujemy interesujące uniwersum zwane $L[\mathbf{R}]$.

Teoria mnogości ZFC pozwala na przypisanie każdemu zbiorowi x jego *rangi*, którą oznaczamy $rank(x)$. Zbiorowi pustemu przypisujemy rangę 0. Dla zbiorów niepustych $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y)+1 : y \in x\}$. Stąd już krok do zdefiniowania *poziomów von Neumanna*, V_α, mianowicie $V_\alpha = \{x : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$. Każde V_α jest zbiorem. Zbiory V_α pozwalają z kolei zdefiniować zbiory *porządkowo definiowalne*. Zbiór x jest porządkowo definiowalny, jeśli dla jakiegoś poziomu von Neumanna V_α i jakiejś formuły $\varphi(\cdot)$, x jest zbiorem tych elementów y z V_α, które spełniają w $\langle V_\alpha, \in\rangle$ formułę $\varphi(y)$. Klasę zbiorów definiowalnych z liczb porządkowych oznaczamy OD. Jak wykazał Gödel, uniwersum złożone ze zbiorów *dziedzicznie definiowalnych z liczb porządkowych* (tj. takich, że one same, wszystkie ich elementy, elementy elementów etc. są definiowalne z liczb porządkowych) spełnia wszystkie aksjomaty ZFC. Podobnie jak $L[\mathbf{R}]$ definiujemy klasę $OD[\mathbf{R}]$. Jeden z problemów, jakie sformułujemy na końcu tego artykułu, odnosi się właśnie do tego uniwersum.

Długo nie umiano wykazać, że hipoteza continuum jest niezależna, tzn. nie może być udowodniona na gruncie teorii mnogości ZFC (o ile ta ostatnia jest niesprzeczna). Zostało to wykazane w roku 1963 przez P.J. Cohena. Rozumowanie Cohena jest bardziej skomplikowane niż argument Gödla i opiera się na konstrukcji modelu boolowskiego – klasy złożonej z pewnych funkcji o wartościach w algebrze Boole'a podzbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni topologicznej. Przy odpowiedniej definicji relacji należenia i relacji równości dla takich funkcji klasa tych funkcji nadaje wszystkim aksjomatom ZFC wartość boolowską **1**. Ale dla odpowiednio dobranej przestrzeni topologicznej wartość formuły opisującej hipotezę continuum w tym uniwersum jest równa **0**. Teraz już tylko trzeba dowieść, że cokolwiek da się wykazać z formuł przyjmujących w owym modelu wartość **1**, też ma wartość **1**. Tak więc hipoteza continuum jest zdaniem niezależnym na gruncie teorii mnogości. Ani nie jest dowodliwa (Cohen), ani jej negacja nie jest dowodliwa (Gödel). Przy okazji dowodu niezależności hipotezy continuum Cohen wprowadził metodę tzw. forsingu. Metoda ta była następnie użyta do bardzo wielu dowodów niezależności, w tym do dowodu niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów ZFC. Dość wspomnieć, że w latach sześćdziesiątych

do wysokości odpowiadających prędkościom dwóch kul przed zderzeniem, następnie przelać część płynu z jednego kieliszka do drugiego tak, aby poziom cieczy w nim odpowiadał prędkości jednej z kul po zderzeniu. Z poziomu w drugim kieliszku odczytujemy prędkość drugiej kuli po zderzeniu. Ten sam schemat rozumowania można zastosować nawet do tak zaawansowanego zagadnienia, jak relatywistyczne dodawanie prędkości. Potrzebne są do tego

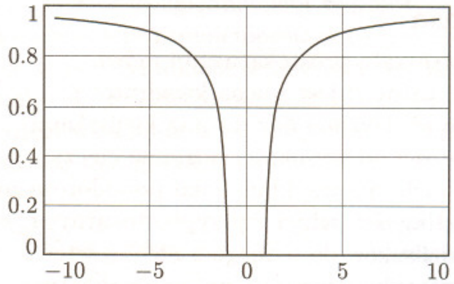
Kieliszki Einsteina

Jak można przeczytać w artykule Wojciecha Kopczyńskiego w jednym z niedawnych numerów *Delty* (7/1997), relatywistyczne dodawanie prędkości niezwykle się upraszcza, kiedy zamiast prędkości v rozważamy tak zwany kąt hiperboliczny ψ spełniający warunek $\mathrm{tgh}\psi = v/\mathrm{c}$, gdzie $\mathrm{tgh}\psi = (\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{e}^{-\psi}) / (\mathrm{e}^{\psi} + \mathrm{e}^{-\psi})$ jest tangensem hiperbolicznym, natomiast c – oczywiście prędkością światła. Kąt hiperboliczny jest bowiem addytywny: aby otrzymać prędkość będącą relatywistycznym złożeniem dwóch prędkości, wystarczy znaleźć kąt hiperboliczny prędkości wypadkowej, zwyczajnie dodając kąty hiperboliczne prędkości składowych. Mówimy tu o najprostszym przypadku dodawania relatywistycznego ruchów odbywających się wzdłuż jednej prostej. Widać więc, że możemy zastosować tu przywołany poprzednio schemat $f(a) + f(b) = f(c)$, gdzie potrzebną nam funkcją jest funkcja odwrotna do tangensa hiperbolicznego, wzięta od prędkości podzielonej przez prędkość światła $f(v) = \mathrm{Artgh}(v/\mathrm{c})$. Jeżeli chcemy skonstruować kieliszek Einsteina, potrzebujemy zgodnie z poprzednimi rozważaniami zadać w wersji tradycyjnej promień proporcjonalny do pierwiastka z pochodnej naszej funkcji lub w wersji płaskiej – szerokość proporcjonalną do tej pochodnej. Różniczkując naszą funkcję, mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} f(v) = \frac{1}{\mathrm{c}\left(1 - (v/\mathrm{c})^2\right)},$$

a więc, uwzględniając dowolność skalowania, promień kieliszka w zależności od wysokości powinien mieć postać

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (H/H_0)^2}},$$



natomiast szerokość płaskiego kieliszka Einsteina jest

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{1 - (H/H_0)^2}.$$

W praktyce kształt kieliszka w wersji płaskiej wygląda tak jak na wykresie.

Relatywistyczną sumą prędkości będzie, na przykład, prędkość v_2 w układzie spoczynkowym cząstki poruszającej się z prędkością v_1 względem rakiety pędzącej z prędkością u, oczywiście wszystko wzdłuż jednej prostej. Dla znalezienia prędkości wypadkowej wystarczy zawartość dwóch kieliszków Einsteina, napełnionych do poziomów odpowiadających v_1 oraz u, wlać do jednego z nich. Oczywiście skala prędkości nie osiąga tu c, gdyż wtedy kieliszki musiałyby mieć nieskończone rozmiary.

Zachęcam Czytelnika do projektowania kieliszków opisujących najróżniejsze prawa przyrody, a nawet do szukania stosownych kształtów po sklepach.

Słońce a klimat

Tomasz KWAST

O zależności Ziemi i licznych, zachodzących na niej, zjawisk od Słońca nikogo nie trzeba przekonywać. Bywa raczej odwrotnie, tzn. niektórzy są skłonni dopatrywać się decydującej roli Słońca tam, gdzie jest to nieuzasadnione, a przynajmniej nie dowiedzione. Na poparcie tych domniemanych więzi przytacza się różne statystyki, zapominając o tym, że statystyka jest cierpliwa, korelować można wszystko ze wszystkim, tylko że na końcu i tak nie wiadomo, czy korelacja – jeżeli w ogóle wystąpi – jest przypadkowa, czy jest skutkiem jakiejś fizycznej więzi. Nierzadko w prognozie pogody słyszymy np., że następny dzień będzie ciężki dla meteopatów, bo nadciąga niż. Tymczasem naturalne jest, że ponura pogoda działa na wszystkich przygnębiająco, nikt nie lubi gwałtownych zmian ciśnienia, za to jeżeli ktoś akurat dostał podwyżkę, to najbardziej ponura pogoda nie zepsuje mu nastroju. Tak więc ostrożnie z tego rodzaju statystykami, bo można by uwierzyć nawet w to, że konfiguracja planet w chwili urodzenia człowieka określa jego charakter i losy.

Niemniej jednak Ziemia od Słońca otrzymuje konkretną ilość energii, która określa średnią temperaturę i w ogóle klimat. W ciągu roku Słońce silniej oświetla to północną, to znowu południową półkulę Ziemi – wskutek pochylenia ziemskiej osi obrotu – i wynikiem tego są pory roku. W ciągu roku zmienia się też odległość Ziemi od Słońca, a więc ilość energii, otrzymywanej od Słońca, lekko się zmienia. Jednak jest to efekt bardzo mały, gdyż spłaszczenie orbity ziemskiej jest niewielkie, a poza tym ilość ta uśrednia się już po roku. Chcielibyśmy wiedzieć, czy w dłuższych okresach czasu zmiany zachodzące na Słońcu mają wpływ na klimat Ziemi. Najpierw trzeba więc stwierdzić, czy takie zmiany na Słońcu w ogóle zachodzą. Nie ma wątpliwości, że Słońce przechodzi 11-letni (średnio) cykl aktywności. W okresie tym zmienia się liczba plam, magnetyzm i całkowite natężenie promieniowania słonecznego. Minimum cyklu to minimum liczby plam, w tym też czasie pole magnetyczne na powierzchni Słońca jest najsłabsze i – co nie jest oczywiste – najsłabsze jest też całkowite promieniowanie Słońca. Inaczej mówiąc, zaplamione Słońce świeci silniej, gdyż plamom towarzyszą liczne obszary aktywne, które z nadmiarem rekompensują zmniejszenie się świecącej normalnie powierzchni Słońca. Zmiany te są zresztą bardzo małe. Ziemia otrzymuje od Słońca średnio 1,372 kW/m^2 (jest to tzw. stała słoneczna), a wspomniane zmiany to w przybliżeniu o jednostkę na trzecim miejscu dziesiętnym, może trochę więcej. Ten 11-letni cykl aktywności Słońca przejawia się w rozmaitym natężeniu występowania zórz polarnych, okresowych trudnościach w łączności radiowej, różnym napromieniowaniu Ziemi przez energetyczne cząstki pochodzenia kosmicznego itd. Czy jednak ma to znaczenie dla klimatu? Jeżeli nawet kroniki zanotują, że były lata chłodne i gorące, to nie nazwiemy tego zmianami, lecz fluktuacjami klimatu, bo 11 lat to za mało, by już orzekać o zmianie klimatu.

Czy na Słońcu zachodzą zmiany o dłuższym okresie? Tu już sprawa nie jest prosta, bo nawet to, co najłatwiej zaobserwować, czyli plamy, ludzkość śledzi (w każdym razie systematycznie) nie dłużej niż od wynalezienia teleskopu, czyli od niecałych 400 lat. Wiadomo, że w tym okresie wystąpiło jedno bardzo długie minimum aktywności Słońca (tzw. minimum Maundera) w latach 1640–1700, któremu towarzyszyło dość istotne oziębienie, przynajmniej w Europie. Nie ma też żadnych wzmianek o zorzach z tego okresu, podczas zaćmień praktycznie nie było widać korony słonecznej,

(i później) ciągle pojawiały się twierdzenia o niezależności różnych zdań od teorii mnogości ZFC. Istnieje jednak bardziej pozytywna strona badań w teorii mnogości: niemal wszystkie te zdania niezależne dają się jednak udowodnić lub obalić w dwóch naturalnych poduniwersach, mianowicie poduniwersum zbiorów konstruowalnych L oraz (przy użyciu hipotez o istnieniu dużych liczb kardynalnych) we wspomnianym wyżej poduniwersum $L[\mathbf{R}]$.

W związku z tym motywem przewodnim badań teorii mnogości stały się tzw. duże liczby kardynalne. Różnych klas takich liczb jest wiele – skoncentrujemy się tutaj na dyskusji jednego ich rodzaju, mianowicie liczb mierzalnych. Oto mianowicie liczbę kardynalną κ nazywamy mierzalną, jeśli dla zbioru X mocy κ w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X istnieje taka miara o wartościach $0,\ 1$, że miara każdego zbioru jednoelementowego jest równa 0, miara całego zbioru X jest 1, suma zaś mniej niż κ zbiorów miary 0 ma miarę 0. Na gruncie teorii mnogości ZFC nie można udowodnić istnienia liczb mierzalnych, dlatego że w uniwersum L nie ma odpowiednich miar. Ale założenie istnienia liczb mierzalnych, lub innych dużych liczb kardynalnych, ma liczne ciekawe i głębokie konsekwencje w analizie rzeczywistej i kombinatoryce, szczególnie jej części dotyczącej zbiorów nieskończonych.

Praktykujący matematyk, algebraik albo analityk, nieczęsto styka się z problemami niezależnymi od teorii mnogości ZFC. Fakt ten jest zadziwiający, bowiem teoria mnogości została odkryta przez Cantora ponad 100 lat temu. Mimo że matematyka jest stale inspirowana przez nauki przyrodnicze (opisy rzeczywistości fizycznej), prawie nigdy nie prowadzi nas do zdań niezależnych od ZFC lub do nowych aksjomatów. Co więcej, w ostatnich latach wiele słynnych problemów (np. hipotezy Fermata oraz Bieberbacha) zostało rozwiązanych przy użyciu bardzo słabych podteorii teorii ZFC. Zważmy, że sama niezależność jakiegoś zdania od teorii mnogości nie mówi nam nic o prawdziwości tego zdania. Mówi ona tylko, że takie zdanie jest fałszywe w jakimś uniwersum będącym modelem teorii ZFC. Tak więc wyniki o niezależności różnych zdań zazwyczaj mówią tylko o tym, co się dzieje w pewnych poduniwersach. Jeśli ograniczymy się do uniwersum zbiorów konstruowalnych, to otrzymamy zupełnie inny obraz struktury zbiorów liczb rzeczywistych, niż w uniwersum złożonym ze zbiorów konstruowalnych z miary o wartościach 0, 1 na liczbie mierzalnej. Natomiast budowanie uniwersum wszystkich zbiorów jest procesem, który nie zakończył się (i prawdopodobnie nigdy się nie zakończy).

Szczególnie jasno widać rolę różnych uniwersów, gdy spojrzeć na konsekwencje aksjomatu determinacji. W latach 60. Mycielski i Steinhaus rozważali zdanie o istnieniu strategii zwycięskich dla klasy gier pozycyjnych należących do $L[\mathbf{R}]$, zwane *aksjomatem determinacji*. Istnienie takich strategii okazało się bardzo silnym założeniem (przeczącym aksjomatowi konstruowalności). Co więcej, aksjomat determinacji daje wiele konsekwencji zgodnych z intuicją fizyczną i pozwala rozwiązać wiele problemów dotyczących struktury zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów. Determinacja dostarczyła nowego impetu badaniom deskryptywnej teorii mnogości (tj. teorii definiowalnych podzbiorów tzw. przestrzeni polskich, czyli przestrzeni metrycznych ośrodkowych i zupełnych). W ostatnich latach Martin, Woodin i Steele wykazali, że istnienie owych strategii dla gier w $L[\mathbf{R}]$ wynika z aksjomatów istnienia „dużych" liczb kardynalnych.

Teoria mnogości odgrywa dziś rolę analogiczną do tej, jaką geometria Euklidesa grała przez ponad półtora tysiąca lat – do odkryć Newtona i Leibniza, mianowicie jest teorią uniwersalną dla współczesnej matematyki. Ale jej aksjomatyka nie jest zupełna. Niekiedy w trakcie rozwoju matematyki napotykamy nowe zasady dotyczące zbiorów, na przykład aksjomat determinacji dla klasy $L[\mathbf{R}]$. Rozwój matematyki zadecyduje, które z tych i innych nowych aksjomatów, jakie niechybnie się pojawią, będą powszechnie akceptowane w końcu XXI wieku.

Na zakończenie omówienia teorii mnogości podkreślmy raz jeszcze, że teoria mnogości ZFC wystarcza do wyprowadzenia całej niemal współczesnej matematyki. Nie wiemy, dlaczego tak się dzieje, aksjomatyka pochodzi z początku wieku (z roku 1908), a mimo to po dziś dzień 99% wyników matematycznych nie wymaga środków spoza ZFC. Wzmocnienia ZFC aksjomatami istnienia dużych liczb kardynalnych nie są inspirowane przez zastosowania, lecz raczej przez pojęcia tworzone w wyobraźni ludzkiej i nie mające interpretacji fizycznych. Tylko aksjomat determinacji dla $L[\mathbf{R}]$ inspirowany jest przez intuicje fizyczne.

Część trzecia ukaże się w *Delcie* 1/2000.

a obecne pomiary zawartości węgla ^{14}C dowodzą jego zwiększonej ilości w substancjach organicznych z tamtych czasów, bowiem słabe słoneczne pole magnetyczne nie chroniło Ziemi przed cząstkami promieniowania kosmicznego, produkującymi w atmosferze promieniotwórczy węgiel z azotu. Informacje o temperaturze na Ziemi są jeszcze uboższe, rzetelne obejmują ostatnie 250 lat, ale chyba do dziś trudno mówić, że dotyczą całej Ziemi. Wynika z nich, że temperatura jest skorelowana nie z fazą cyklu, lecz z jego długością, przy czym w okresie długich cykli (około lat 1800, 1855 i 1900) następowało obniżenie się średniej temperatury na północnej półkuli Ziemi, zresztą zaledwie o mniej niż jeden stopień. Jest nawet gorzej, gdyż minimum temperatury czasem następowało po najdłuższych cyklach aktywności Słońca, a czasem przed. Jest więc korelacja, ale czy także związek fizyczny?

Badanie tych zagadnień stwarza chyba więcej nowych pytań niż daje odpowiedzi na dawne pytania. Próby odtwarzania związków Ziemia-Słońce choćby w czasach historycznych są jeszcze bardziej zawodne. Wiadomości o klimacie są wyrywkowe, a plam i tak nikt nie obserwował. W odniesieniu do czasów dawniejszych niepewność jest jeszcze większa. O temperaturze na danym obszarze próbuje się wnioskować np. na podstawie śladów roślinności w odpowiednich warstwach geologicznych, nigdy jednak nie ma pewności, czy pyłki roślin znajdowane w tych warstwach pochodzą akurat z tego terenu, czy zostały przywiane przez wiatr. Dlatego wyciąganie wniosków z takich obserwacji pośrednich jest i trudne, i niepewne.

Rzecz jasna, nonsensem byłoby twierdzić, że ziemski klimat nie zależy od Słońca. Jednak udokumentowane zmiany aktywności Słońca powodują bardzo niewielkie zmiany stałej słonecznej i – jak widzimy – bardzo niewielkie zmiany temperatury na Ziemi. Zapewne jedno z drugim wiąże się, chcielibyśmy jednak umieć oddzielić wpływ Słońca od innych czynników określających ziemski klimat. Wydaje się, że nastanie i ustąpienie epok lodowcowych wywoływane są zmianami w przebiegu wielkich prądów morskich, a te z kolei wypiętrzaniem się lub zanikaniem lądów, czyli ogólnie ruchem płyt tektonicznych. Ale np. wyginięcie dinozaurów 65 mln lat temu nastąpiło chyba z innych przyczyn. Coraz bardziej przebija się hipoteza upadku wielkiego meteorytu – prawdopodobnie na skraj Jukatanu – co doprowadziło do takiego zapylenia atmosfery, że z braku światła wyginęła roślinność, a w konsekwencji z głodu dinozaury. Jednak według innej hipotezy Słońce przechodziło w owym czasie przez gęstsze obszary ramienia spiralnego naszej Galaktyki i to oddziaływanie Słońca z gęstą materią międzygwiazdową mogło spowodować znaczne oziębienie klimatu Ziemi. Wreszcie może w ogóle nie ma powodów do przejmowania się zmiennością Słońca, a bardziej drastyczne zmiany klimatu może wywołać wzmożona aktywność wulkaniczna Ziemi lub nawet działalność człowieka, systematycznie zanieczyszczającego środowisko naturalne. Niektórzy twierdzą, że już obserwujemy ocieplenie klimatu, co przypisuje się wzbogaceniu atmosfery w dwutlenek węgla i zwiększenie przez to efektu szklarniowego. Konkurencja z kolei dowodzi, że jest to niemożliwe, gdyż oceany i tak wchłoną każdą (powiedzmy – do pewnych granic), wyprodukowaną przez człowieka, ilość dwutlenku węgla, tak że skład atmosfery jeszcze długo się nie zmieni. Badanie tych zjawisk na pewno jest nie tylko zaspokajaniem naukowej ciekawości, gdyż może dać człowiekowi bardzo konkretne wskazówki co do postępowania w przyszłości. Niestety, jak dotąd wniosek jest raczej pesymistyczny, mianowicie zbyt wiele jest tu niewiadomych. Nie zmienia to faktu, że przyjemnie jest, jeżeli powietrzem daje się oddychać, a wody ze źródła można się napić, więc lepiej zbyt intensywnie z naszą planetą nie eksperymentować.