istnienia zbiorów proponowany przez Fregego (że każda klasa jest zbiorem).

Ten sprzeczny schemat ma postać $\exists x\, \forall y\ [y \in x \Leftrightarrow \varphi(y)]$, gdzie φ jest dowolną formułą języka teorii mnogości.

Niemniej jednak było jasne, że pojęcie zbioru wymaga dobrego opisu. Trzeba było coś zrobić, by pojęcie zbioru mogło służyć matematykom i z odpowiednią propozycją wyszedł Zermelo. W roku 1908 zbudował on układ aksjomatów opisujący zbiory i metody budowania zbiorów, przy czym aksjomaty nie pociągały za sobą wniosku, że klasa R jest zbiorem. Po pewnych ulepszeniach Skolema i Fraenkla wyłoniła się teoria mnogości Zermelo–Fraenkla, powszechnie dziś przyjęta aksjomatyzacja teorii mnogości i całej matematyki, zwana teorią ZFC.

Spośród aksjomatów tej teorii jeden budził zaniepokojenie niektórych matematyków, mianowicie aksjomat wyboru. Aksjomat ten mówi, że dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór (zwany selektorem) mający z każdym elementem owej rodziny dokładnie jeden element wspólny. Jest to uogólnienie oczywistej własności rodzin skończonych, ale jest ono nader niekonstruktywne. Jeśli bowiem myślimy o zbiorach jako tworach, które można konstruować z innych zbiorów za pomocą rozmaitych operacji, to zupełnie nie widać, jakie operacje konstruowałyby ów selektor, który – zgodnie z aksjomatem wyboru – ma istnieć. Dziś pogodziliśmy się z aksjomatem wyboru, który w rozmaitych formach (np. lematu Kuratowskiego–Zorna albo zasady dobrego uporządkowania) jest powszechnie używany. Niemniej jednak przyjęcie aksjomatu wyboru powoduje, że musimy też zaakceptować jego konsekwencje, na przykład paradoksalny rozkład kuli, sprzeczny z intuicjami fizycznymi. Na ogół konsekwencje aksjomatu wyboru są dalsze od zastosowań matematyki, niż twierdzenia, które obywają się bez tego aksjomatu.

Hipoteza continuum mówi, że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny lub jest równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych. Teoria mnogości z aksjomatem wyboru dowodzi, iż jest to równoważne temu, że rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma liczność $\aleph_1$ (tj. najkrótszego zbioru dobrze uporządkowanego i nieprzeliczalnego). Próby rozwiązania tego problemu doprowadziły do wielu interesujących wyników i wskazały na niezupełność dotychczasowego rozumienia pojęcia zbioru liczb rzeczywistych. K. Gödel w drugiej

Pewien komputer analogowy albo prawa przyrody w kieliszkach

Jan GAJ

Dawno, dawno temu, kiedy komputery nazywano mózgami elektronowymi, najlepsze z nich zajmowały całe hale i konsumowały prąd wystarczający do oświetlenia małego miasteczka. Mimo tych cieplarnianych warunków dysponowały pamięcią o kilka rzędów wielkości mniejszą i liczyły znacznie wolniej niż dostępny dziś średniej klasy pecet, co jest najlepszym argumentem na rzecz słuszności polityki naszych kolejnych rządów wobec sfery budżetowej: ograniczanie zasilania może iść w parze ze zwiększaniem wydajności. W tych to dawnych czasach oprócz maszyn cyfrowych istniały też, przede wszystkim w projektach, niesłusznie dziś zapomniane komputery analogowe, w których liczby są reprezentowane przez jakieś wielkości fizyczne, najczęściej elektryczne. Żeby nadrobić to karygodne zaniedbanie, proponuję dziś wycieczkę w krainę cieczy i naczyń. Wycieczka taka stanowi od pewnego czasu jedno z moich marzeń, a ostatnie opory przed jego realizacją pomogły mi usunąć coraz częściej spotykane reklamy piwa bezalkoholowego! Gdyby więc komuś wybujała wyobraźnia podpowiadała naganne skojarzenia, niech porzuci wszelką nadzieję: o napojach wyskokowych tu nie będzie. Żeby zrozumieć, jak działa komputer analogowy, rozważmy najpierw przykład najprostszy.

Kieliszek jako komputer jednowymiarowy

Odpowiedniego kształtu kieliszek może służyć do obliczania zadanej funkcji monotonicznej. Funkcją tą będzie objętość cieczy (oczywiście bezalkoholowej) w kieliszku, a argumentem – wysokość słupa cieczy. Żeby nasz przykład uczynić konkretniejszym, trzeba poszukać prawa przyrody opisywanego jakąś funkcją monotoniczną. Rozważmy na przykład prawo Stefana–Boltzmanna opisujące zależność natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego od temperatury:

$$I = \sigma T^4.$$

Za temperaturę przyjmiemy wysokość poziomu cieczy w kieliszku $T = \alpha H$ (z uwzględnieniem współczynnika α wyrażającego skalę), a natężeniem promieniowania będzie objętość tej cieczy $I = \beta V$ (ze współczynnikiem skalowania β). Musimy więc skonstruować kieliszek, w którym objętość będzie proporcjonalna do czwartej potęgi wysokości $V = \beta^{-1}\sigma\alpha^4 H^4 = AH^4$, gdzie $A = \beta^{-1}\sigma\alpha^4$ jest stałym współczynnikiem.

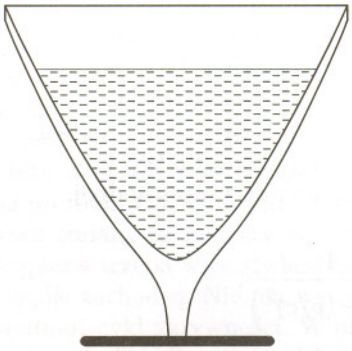
W przypadku kieliszka o symetrii obrotowej scharakteryzowanego zależnością promienia R od wysokości H objętość można wyrazić wzorem $V = \int\limits_0^H \pi R^2(h)\mathrm{d}h$, z którego wynika $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H} = \pi R^2$, a zatem $R = \sqrt{\pi^{-1}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}}$.

W naszym przypadku oznacza to proporcjonalność promienia do wysokości w potędze $3/2$, a więc kieliszek wyrażający prawo Stefana–Boltzmanna powinien wyglądać w przekroju tak, jak na powyższym rysunku.

Oczywiście, ważny jest tylko kształt wnętrza, reszta z punktu widzenia naszego wywodu nie ma żadnego znaczenia. Obliczanie natężenia promieniowania przy użyciu takiego kieliszka polegałoby na przelaniu do menzurki cieczy z kieliszka napełnionego do wysokości odpowiadającej temperaturze. Jeżeli ktoś nie lubi pierwiastkowania, może skonstruować „kieliszek" płaski, w którym warstwa cieczy o grubości d będzie ograniczona ściankami determinującymi szerokość b słupa cieczy zależną od wysokości h. W takim kieliszku objętość V w zależności od wysokości słupa cieczy H będzie opisana wzorem

$$V = d\int_0^H b(h)\mathrm{d}h.$$

Pozwala to, podobnie jak w poprzednim przypadku, wyliczyć szerokość b jako funkcję wysokości H dla żądanej zależności objętości od wysokości $b = d^{-1}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}$. Ostatni wzór ukazuje nam szczególną użyteczność kieliszka płaskiego do ilustracji praw przyrody, w których interesuje nas zarówno jakaś wielkość (reprezentowana przez V), jak i jej pochodna (jest do niej proporcjonalna szerokość kieliszka b).



W przypadku zależności kwadratowej (a więc pochodnej liniowo zależnej od argumentu) nie pomylmy się, kieliszek nie będzie miał kształtu stożka, powinien natomiast mieć promień proporcjonalny do pierwiastka z wysokości, a więc wyglądać, jak na rysunku obok.

Ostatni przykład podaję nie bez kozery, bo ilustruje nie tylko prostą zależność kwadratową (na przykład energii kinetycznej od prędkości). Świetnie nadaje się też do rozszerzenia naszych rozważań na przypadek dwuwymiarowy. Prawem, które również potrzebuje takiego kieliszka, a najlepiej dwóch, jest

Twierdzenie Pitagorasa

Jak wiemy, odnosi się ono do trójkąta prostokątnego i mówi, że suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej: $a^2 + b^2 = c^2$. Dysponując dwoma kieliszkami o kwadratowej zależności objętości od wysokości poziomu cieczy, wystarczy nalać do każdego z nich, na przykład, soku pomidorowego do wysokości odpowiadającej długości jednej z przyprostokątnych trójkąta, zlać zawartość obu kieliszków do jednego z nich, a wtedy odczytamy z wysokości poziomu soku długość przeciwprostokątnej. Łatwo zauważyć, że ten tryb postępowania można stosować wtedy, kiedy mamy do czynienia z dodawaniem pewnych funkcji wielkości, które nas interesują, według schematu $f(a) + f(b) = f(c)$. Na przykład energia całkowita układu dwóch identycznych kul jest proporcjonalna do sumy kwadratów ich prędkości. Dzięki temu można omawianą parę kieliszków wykorzystać także do przewidywania wyniku zderzenia sprężystego, w którym, jak wiadomo, energia kinetyczna się zachowuje, a więc zachodzi równość

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2,$$

gdzie dolny indeks numeruje kule, a prim odnosi się do sytuacji po zderzeniu. Trzeba tylko nalać cieczy do dwóch kieliszków

połowie lat 30. wykazał, że hipoteza continuum jest *niesprzeczna* z aksjomatyką teorii mnogości. Krok ten był podobny do innego, wcześniejszego rewolucyjnego wyniku Gödla – mianowicie dowodu niezupełności arytmetyki.

Technika użyta przez Gödla wiąże się z odwróceniem niejako obiekcji co do aksjomatu wyboru. Zamiast pytać, jak definiować zbiory, Gödel ogranicza zbiory do tych, które dadzą się skonstruować w trakcie (pozaskończonego) procesu, który pokrótce opiszemy poniżej. Postępujemy tak: definiujemy indukcyjnie „poziomy konstruowalne", tak że zbiory należące do kolejnego poziomu są definiowalne w strukturze złożonej z obiektów poprzedniego poziomu. Definicje są formułami, a formułom można przypisać kody będące liczbami naturalnymi. Teraz możemy już definiować dobry porządek zbiorów konstruowalnych. Postępujemy indukcyjnie. Wystarczy wskazać porządek kolejnego poziomu. Najpierw porządkujemy k-tki obiektów z poziomów poprzednich. Następnie zaś dany poziom porządkujemy według par: kod formuły, ciąg parametrów (z uprzednich poziomów). Wszystko to, wraz z dodatkowym faktem (wielce nietrywialnym), mianowicie tym, że elementarne podstruktury poziomów są same izomorficzne z poziomami, wystarcza do wykazania, iż wszystkie konstruowalne zbiory liczb naturalnych są skonstruowane w krokach o indeksach przeliczalnych. To już łatwo implikuje hipotezę continuum wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych. Jeszcze tylko musimy wykazać, że wszystkie aksjomaty ZFC są spełnione w uniwersum zbiorów konstruowalnych, ale to już jest łatwe. W szczególności aksjomatyka ZFC pozostaje niesprzeczna po dołączeniu hipotezy continuum. Co więcej, wszystkie zbiory konstruowalne (i tylko one) są konstruowalne wewnątrz uniwersum konstruowalnego. Tak więc wszelkie konsekwencje teorii ZFC i zdania mówiącego, że wszystkie zbiory są konstruowalne, są prawdziwe wewnątrz uniwersum zbiorów konstruowalnych. Wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych prawdziwa jest nawet *uogólniona* hipoteza continuum: dla każdej liczby porządkowej α jest $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Klasa L zbiorów konstruowalnych może być wzbogacona przez dodatkowe obiektywy, które mogą być używane w powyższej definicji indukcyjnej. Na przykład, jeśli dodamy wszystkie liczby rzeczywiste, otrzymujemy interesujące uniwersum zwane $L[\mathbf{R}]$.

Teoria mnogości ZFC pozwala na przypisanie każdemu zbiorowi x jego *rangi*, którą oznaczamy $rank(x)$. Zbiorowi pustemu przypisujemy rangę 0. Dla zbiorów niepustych $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y)+1 : y \in x\}$. Stąd już krok do zdefiniowania *poziomów von Neumanna*, V_α, mianowicie $V_\alpha = \{x : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$. Każde V_α jest zbiorem. Zbiory V_α pozwalają z kolei zdefiniować zbiory *porządkowo definiowalne*. Zbiór x jest porządkowo definiowalny, jeśli dla jakiegoś poziomu von Neumanna V_α i jakiejś formuły $\varphi(\cdot)$, x jest zbiorem tych elementów y z V_α, które spełniają w $\langle V_\alpha, \in\rangle$ formułę $\varphi(y)$. Klasę zbiorów definiowalnych z liczb porządkowych oznaczamy OD. Jak wykazał Gödel, uniwersum złożone ze zbiorów *dziedzicznie definiowalnych z liczb porządkowych* (tj. takich, że one same, wszystkie ich elementy, elementy elementów etc. są definiowalne z liczb porządkowych) spełnia wszystkie aksjomaty ZFC. Podobnie jak $L[\mathbf{R}]$ definiujemy klasę $OD[\mathbf{R}]$. Jeden z problemów, jakie sformułujemy na końcu tego artykułu, odnosi się właśnie do tego uniwersum.

Długo nie umiano wykazać, że hipoteza continuum jest niezależna, tzn. nie może być udowodniona na gruncie teorii mnogości ZFC (o ile ta ostatnia jest niesprzeczna). Zostało to wykazane w roku 1963 przez P.J. Cohena. Rozumowanie Cohena jest bardziej skomplikowane niż argument Gödla i opiera się na konstrukcji modelu boolowskiego – klasy złożonej z pewnych funkcji o wartościach w algebrze Boole'a podzbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni topologicznej. Przy odpowiedniej definicji relacji należenia i relacji równości dla takich funkcji klasa tych funkcji nadaje wszystkim aksjomatom ZFC wartość boolowską $\mathbf{1}$. Ale dla odpowiednio dobranej przestrzeni topologicznej wartość formuły opisującej hipotezę continuum w tym uniwersum jest równa $\mathbf{0}$. Teraz już tylko trzeba dowieść, że cokolwiek da się wykazać z formuł przyjmujących w owym modelu wartość $\mathbf{1}$, też ma wartość $\mathbf{1}$. Tak więc hipoteza continuum jest zdaniem niezależnym na gruncie teorii mnogości. Ani nie jest dowodliwa (Cohen), ani jej negacja nie jest dowodliwa (Gödel). Przy okazji dowodu niezależności hipotezy continuum Cohen wprowadził metodę tzw. forsingu. Metoda ta była następnie użyta do bardzo wielu dowodów niezależności, w tym do dowodu niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów ZFC. Dość wspomnieć, że w latach sześćdziesiątych

do wysokości odpowiadających prędkościom dwóch kul przed zderzeniem, następnie przelać część płynu z jednego kieliszka do drugiego tak, aby poziom cieczy w nim odpowiadał prędkości jednej z kul po zderzeniu. Z poziomu w drugim kieliszku odczytujemy prędkość drugiej kuli po zderzeniu. Ten sam schemat rozumowania można zastosować nawet do tak zaawansowanego zagadnienia, jak relatywistyczne dodawanie prędkości. Potrzebne są do tego

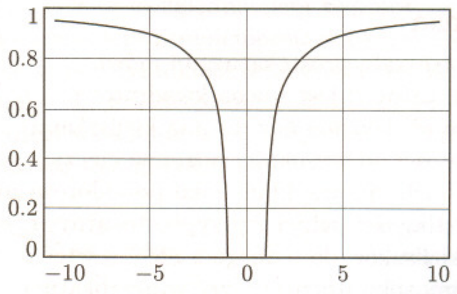
Kieliszki Einsteina

Jak można przeczytać w artykule Wojciecha Kopczyńskiego w jednym z niedawnych numerów *Delty* (7/1997), relatywistyczne dodawanie prędkości niezwykle się upraszcza, kiedy zamiast prędkości v rozważamy tak zwany kąt hiperboliczny ψ spełniający warunek $\mathrm{tgh}\psi = v/\mathrm{c}$, gdzie $\mathrm{tgh}\psi = \left(\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{e}^{-\psi}\right) / \left(\mathrm{e}^{\psi} + \mathrm{e}^{-\psi}\right)$ jest tangensem hiperbolicznym, natomiast c – oczywiście prędkością światła. Kąt hiperboliczny jest bowiem addytywny: aby otrzymać prędkość będącą relatywistycznym złożeniem dwóch prędkości, wystarczy znaleźć kąt hiperboliczny prędkości wypadkowej, zwyczajnie dodając kąty hiperboliczne prędkości składowych. Mówimy tu o najprostszym przypadku dodawania relatywistycznego ruchów odbywających się wzdłuż jednej prostej. Widać więc, że możemy zastosować tu przywołany poprzednio schemat $f(a) + f(b) = f(c)$, gdzie potrzebną nam funkcją jest funkcja odwrotna do tangensa hiperbolicznego, wzięta od prędkości podzielonej przez prędkość światła $f(v) = \mathrm{Artgh}(v/\mathrm{c})$. Jeżeli chcemy skonstruować kieliszek Einsteina, potrzebujemy zgodnie z poprzednimi rozważaniami zadać w wersji tradycyjnej promień proporcjonalny do pierwiastka z pochodnej naszej funkcji lub w wersji płaskiej – szerokość proporcjonalną do tej pochodnej. Różniczkując naszą funkcję, mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} f(v) = \frac{1}{\mathrm{c}\left(1 - (v/\mathrm{c})^2\right)},$$

a więc, uwzględniając dowolność skalowania, promień kieliszka w zależności od wysokości powinien mieć postać

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{1-(H/H_0)^2}},$$



natomiast szerokość płaskiego kieliszka Einsteina jest

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{1-(H/H_0)^2}.$$

W praktyce kształt kieliszka w wersji płaskiej wygląda tak jak na wykresie.

Relatywistyczną sumą prędkości będzie, na przykład, prędkość v_2 w układzie spoczynkowym cząstki poruszającej się z prędkością v_1 względem rakiety pędzącej z prędkością u, oczywiście wszystko wzdłuż jednej prostej. Dla znalezienia prędkości wypadkowej wystarczy zawartość dwóch kieliszków Einsteina, napełnionych do poziomów odpowiadających v_1 oraz u, wlać do jednego z nich. Oczywiście skala prędkości nie osiąga tu c, gdyż wtedy kieliszki musiałyby mieć nieskończone rozmiary.

Zachęcam Czytelnika do projektowania kieliszków opisujących najróżniejsze prawa przyrody, a nawet do szukania stosownych kształtów po sklepach.