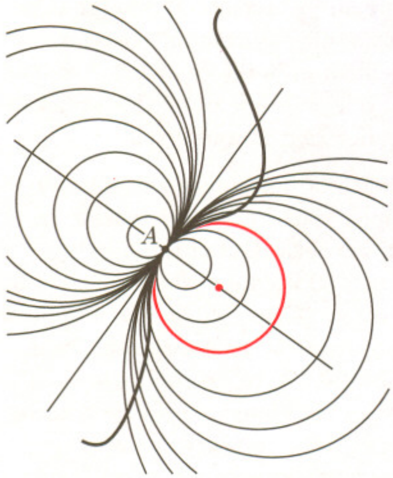
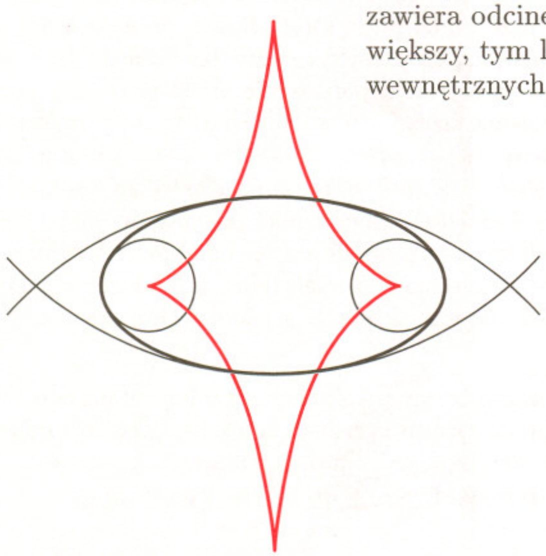
Kółka i sznurki

Kiedy jadący samochód wejdzie w zakręt (szczególnie, gdy kierowca nie zmniejszy szybkości), jadący czują, że jakaś siła popycha ich na zewnętrzne (w stosunku do zakrętu) drzwi. Fizycy o tym zjawisku mówią *siła odśrodkowa*, matematycy nazywają je *krzywizna*. Można wielkość krzywizny mierzyć w rozmaitych jednostkach – matematycy umówili się, że będą używać odwrotności długości (np. $\frac{1}{\mathrm{cm}}$). Wybór ten staje się zrozumiały, gdy zauważymy, iż wielkość krzywizny przy jeździe po okręgu (dla tej samej szybkości jazdy) jest odwrotnie proporcjonalna do promienia tego okręgu, a wielkość promienia możemy mierzyć w centymetrach. Przyjmuje się przy tym dla prostoty umowę, że stosunek tej proporcjonalności jest 1.

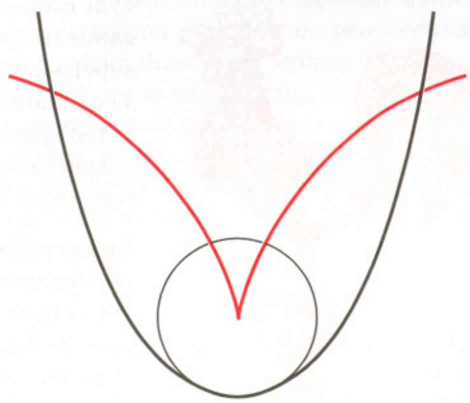


Rys. 1. Odwrotność długości promienia kolorowego okręgu to krzywizna grubej krzywej w punkcie A, a jego środek to środek krzywizny.

Jak zorientować się, jaką krzywiznę ma w swoich różnych punktach dana nam przez kogoś, czy coś, krzywa? Metoda jest bardzo prosta ideowo, choć nieco trudniejsza przy praktycznych wyliczeniach. Mianowicie dla punktu krzywej, w którym chcemy zmierzyć jej krzywiznę, bierzemy wszystkie okręgi mające w tym punkcie tę samą prostą styczną, co krzywa, i wybieramy ten okrąg, który najlepiej (w okolicy tego punktu) badaną krzywą przybliża (rys. 1). Odwrotność promienia tego okręgu to właśnie wielkość krzywizny. Ale dowiedzieliśmy się też, gdzie ta krzywizna ma środek. Możemy więc dla prawie każdej krzywej znaleźć inną krzywą, złożoną z jej środków krzywizny i zwaną *ewolutą* lub – po polsku – *rozwiniętą* tej krzywej (rys. 2 i 3). Skąd wzięła się taka nazwa, za chwilę. Słowo „prawie" bierze się stąd, że, gdy krzywa zawiera odcinek, to tam najlepiej przybliżającego go okręgu nie ma (im większy, tym lepszy) i tym samym nie ma, dla żadnego z jego punktów wewnętrznych, środka krzywizny.



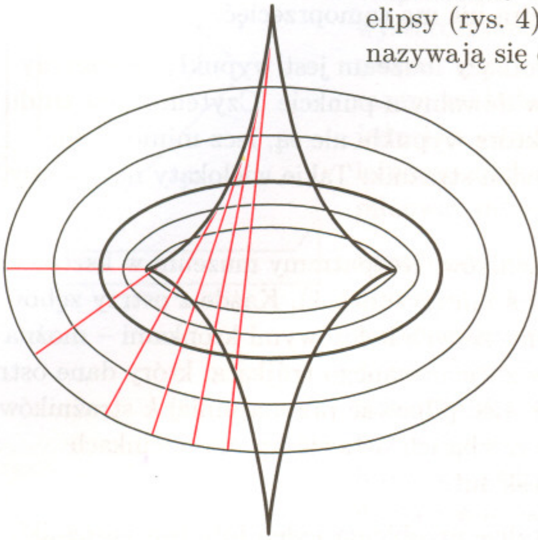
Rys. 2. Elipsa (gruba) i jej ewoluta (kolorem). Jeśli elipsa ma równanie $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, to jej ewoluta E_e ma równanie $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.



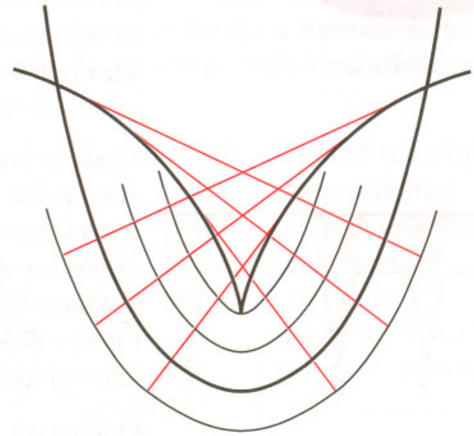
Rys. 3. Parabola (gruba) i jej ewoluta (kolorem). Jeśli parabola ma równanie $x^2 = 2py$, to jej ewoluta E_p ma równanie $27px^2 = 8(y-p)^3$.

O kółkach już było, teraz o sznurkach. Najłatwiej siłę odśrodkową demonstrować posługując się rozkręconym ciężarkiem na sznurku. Gdy chodzi o ruch po okręgu, należy trzymać sznurek w jednym punkcie – obracający się ciężarek będzie zataczał okrąg. Ale przecież jeden punkt to ewoluta okręgu. Analogicznie można postąpić w przypadku dowolnej ewoluty.

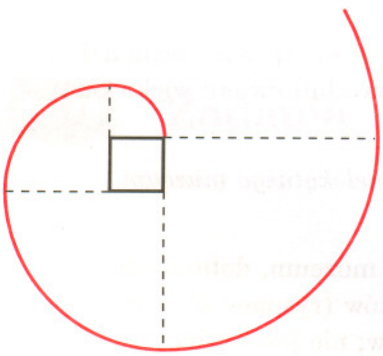
Wyobraźmy sobie napiętą nić rozwijaną ze szpulki w kształcie ewoluty elipsy (rys. 4) czy też ewoluty paraboli (rys. 5). Otrzymane krzywe nazywają się ewolwentami odpowiednio krzywej E_e i E_p.



Rys. 4. Ewolwenty krzywej E_e. Jest wśród nich tylko jedna elipsa – ta, dla której otrzymaliśmy E_e.



Rys. 5. Ewolwenty krzywej E_p. Jest wśród nich tylko jedna parabola – ta, dla której otrzymaliśmy E_p.



Rys. 6. Jedna z ewolwent brzegu kwadratu. Składa się z ćwiartek okręgów. A inne?

Każdy, kto zetknął się z obliczaniem pochodnych, widzi, że relacja między ewolutą i ewolwentą jest zupełnie analogiczna do relacji między pochodną i funkcją pierwotną.

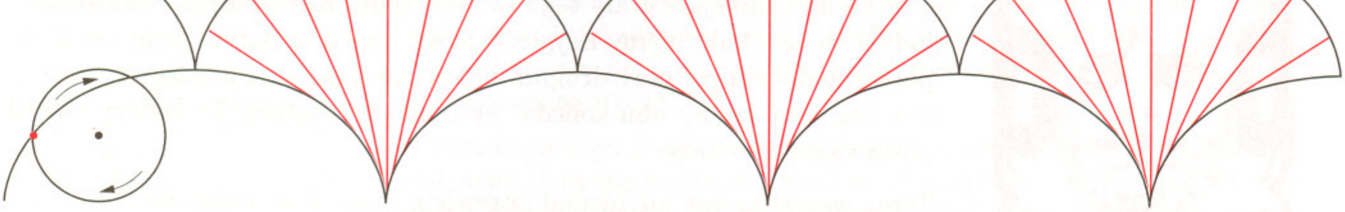
Tym razem polska nazwa ewolwenty – *rozwijająca* – jest całkiem zrozumiała: faktycznie jest to linia, którą zakreślamy rozwijając sznurek. Zauważmy teraz, że ewoluta każdej krzywej, otrzymanej z pewnej krzywej K przez to rozwijanie, jest krzywą K. Mamy zatem wyjaśnienie polskiej nazwy ewoluty i bardzo interesujące twierdzenie dla krzywych bez odcinków:

ewoluta ewolwenty danej krzywej to właśnie ta krzywa.

Są to więc operacje wzajemnie odwrotne.

Ewoluta krzywej (jeśli istnieje) jest jedna, ewolwent zaś jest dużo. To, którą ewolwentę danej krzywej otrzymamy, zależy od początkowej długości sznurka.

Znajdować ewolutę możemy tylko dla krzywych gładkich, to znaczy takich, które w każdym punkcie mają dobrze określoną styczną (i, na dodatek, nie zawierają odcinków), nie mogą natomiast mieć np. dziobków. Przy znajdowaniu ewolwent te ograniczenia są łagodniejsze. Widać to w obu rozpatrzonych przykładach, a rysunek 6 pokazuje, że w brzegu mogą się znajdować i odcinki.

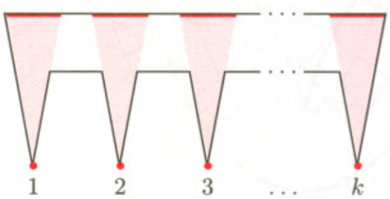


Rys. 7. Huygens odkrył, że krzywa może być taka sama, jak jej ewoluta, czy ewolwenta; przykładem jest cykloida, czyli krzywa jaką zakreśla punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej.

Strażnicy w muzeum

Przypuśćmy, że muzeum ma kształt wielokąta o m bokach (niekoniecznie wypukłego), a jego dyrektor chciałby mieć pewność, że wszystkie punkty muzeum znajdują się stale pod obserwacją strażników, którzy stoją w miejscu, ale mogą się obracać. Ilu strażników powinien zatrudnić? Zakładamy, że muzeum nie ma dziur wewnątrz, tzn. jego brzeg tworzy jedna łamana zamknięta, która nie ma samoprzecięć.

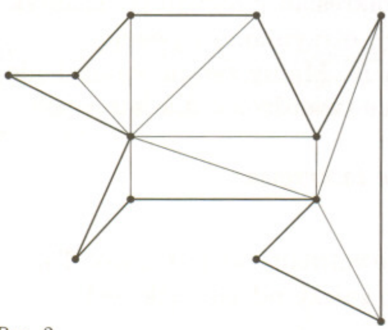
Oczywiście, gdy wielokąt tworzący muzeum jest wypukły, wystarczy jeden strażnik, postawiony w dowolnym punkcie. Czytelnik bez trudu wskaże przykłady muzeów, które wypukłe nie są, lecz mimo to do ich upilnowania wystarcza jeden strażnik. Takie wielokąty nazywamy *gwiaździstymi*.



Rys. 1

Czasem potrzeba więcej strażników. Rozpatrzmy muzeum w kształcie grzebienia, które ma $m = 3k$ ścian (rysunek 1). Każde z ostrzy zębów grzebienia – na rysunku zaznaczonych kolorowymi kropkami – można obserwować tylko z punktów zacieniowanego trójkąta, który dane ostrze zawiera. Tego muzeum musi więc pilnować przynajmniej k strażników i oczywiście tylu wystarczy: trzeba ich ustawić np. na odcinkach oznaczonych kolorowymi kreskami.

Odcinając z muzeum w kształcie grzebienia jeden lub dwa narożniki, przekonamy się, że dla każdej liczby m (nie tylko dla rozpatrzonych przed chwilą m podzielnych przez 3) istnieje muzeum o m bokach, którego musi pilnować przynajmniej $\left[\frac{m}{3}\right]$ strażników.


Rys. 2

Okazuje się, że gorszego przypadku wymyślić nie sposób, zachodzi bowiem następujące twierdzenie, które udowodnił ćwierć wieku temu Vaclav Chvátal:

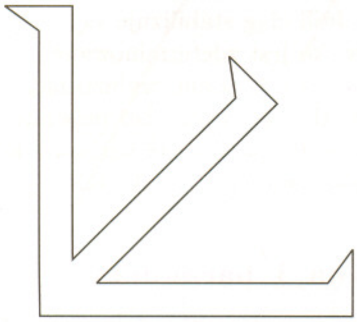
Twierdzenie. *Do pilnowania dowolnego wielokątnego muzeum o m ścianach wystarczy $\left[\frac{m}{3}\right]$ strażników* .

Dla dowodu narysujmy $m - 3$ przekątnych muzeum, dobranych tak, by podzielić muzeum na $m - 2$ trójkątów (rysunek 2). Zawsze można to zrobić, na ogół na wiele sposobów; nie jest ważne, który z nich wybierzemy. Gdy wierzchołki muzeum oznaczymy kropkami, powstanie graf. Okazuje się, że jest to zawsze graf *trójkolorowalny*: jego wierzchołki można pomalować trzema kolorami w taki sposób, żeby każde dwa wierzchołki, które są połączone odcinkiem, miały różne kolory. Udowodnimy to przez indukcję względem m.

Gdy $m = 3$, nie ma czego dowodzić: każdy z wierzchołków malujemy innym kolorem. Przypuśćmy teraz, że $m > 3$ i załóżmy, że dla wszystkich liczb m', mniejszych od m, otrzymany graf jest trójkolorowalny. Weźmy którekolwiek dwa wierzchołki połączone przekątną; dzieli ona cały graf na dwa mniejsze grafy tego samego typu. Korzystając z założenia indukcyjnego, kolorujemy najpierw jeden z nich, a potem drugi, w razie potrzeby dokonując przy drugim malowaniu permutacji kolorów, tak aby uzgodnić kolory obu końców wybranej przekątnej. To kończy dowód postawionej hipotezy.

Teraz wszystko jest już niemal oczywiste: ponieważ mamy m wierzchołków pomalowanych trzema kolorami, więc istnieje kolor – powiedzmy kolor czerwony – którym pomalowano nie więcej niż

$[\frac{m}{3}]$ wierzchołków. Strażników należy ustawić właśnie w tych wierzchołkach; każdy z trójkątów, na które przekątne dzielą muzeum, ma wierzchołek czerwony, a zatem każdego trójkąta z pewnością pilnuje przynajmniej jeden strażnik. Skoro tak, to i całe muzeum znajduje się pod obserwacją.



Rys. 3

Istnieją różne wersje i odmiany zadania o strażnikach w muzeum. Wspomnijmy o jednej z nich, która do dziś czeka na to, aż jakiś wystarczająco zdolny i zapalony człowiek ją rozwiąże. Nadal rozpatrujemy muzeum o m ścianach, takie, jak poprzednio, jednak tym razem zakładamy, że każdy ze strażników może spacerować wzdłuż jednej ze ścian i widzi wszystko, co można zobaczyć z dowolnego punktu leżącego gdziekolwiek na tej ścianie. Ilu spacerujących strażników musi pilnować muzeum?

Łatwo podać, w ślad za Gottfriedem Toussaintem, przykład muzeum o $m = 4s$ ścianach, do którego upilnowania potrzeba przynajmniej s spacerujących strażników. Rysunek 3 przedstawia ten przykład dla $s = 3$; Czytelnik bez trudu wskaże, wzdłuż których ścian powinni spacerować strażnicy. Nie wiadomo natomiast, czy w muzeum o m ścianach $[\frac{m}{4}]$ spacerujących strażników zawsze wystarczy; istnieje hipoteza, która głosi, że tak, być może z wyjątkiem pewnych niezbyt dużych wartości m. Może więc ci z Czytelników, którym marzą się matematyczne ostrogi, spróbują swych sił?

Małą Deltę przygotowali Marek KORDOS i Paweł STRZELECKI

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 898. Niech a i b będą dwiema względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, n zaś liczbą całkowitą. Niech (x_0, y_0) będzie punktem kratowym leżącym na prostej o równaniu $ax + by = n$. Wykazać, że punktami kratowymi na tej prostej, leżącymi najbliżej punktu (x_0, y_0), są $(x_0 - b, y_0 + a)$ i $(x_0 + b, y_0 - a)$.
Rozwiązanie na str. 16

M 899. Niech a i b będą dwiema względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Niech M będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, których nie da się przedstawić w postaci $ax + by$, gdzie x i y są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Znaleźć $\max M$.
Rozwiązanie na str. 15

M 900. Wykazać, że przy założeniach zadania **899** dla dowolnej liczby całkowitej n dokładnie jedna z liczb n i $(\max M - n)$ należy do M.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 511. Kropla wody o masie $m = 0{,}1$ g została umieszczona między dwiema płaskimi i równoległymi płytkami szklanymi, doskonale zwilżalnymi wodą. Jaka jest wielkość siły przyciągania między płytkami, jeżeli znajdują się one w odległości $d = 10^{-4}$ cm? Napięcie powierzchniowe wody $\alpha = 7{,}3 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
Rozwiązanie na str. 15

Ciecz *doskonale zwilża* naczynie, jeśli tworzy menisk wklęsły, stykający się ze ścianką naczynia pod kątem równym 0. Podobnie ciecz *doskonale nie zwilża* naczynia, jeśli tworzy menisk wypukły, stykający się ze ścianką pod tym samym kątem (a więc w obu przypadkach ścianka naczynia jest styczna do menisku w punkcie zetknięcia się z nim).

F 512. Gram rtęci został umieszczony między dwiema płaskimi płytkami szklanymi. Jaką siłę należy przyłożyć do górnej płytki, aby rtęć miała postać krążka jednakowej grubości o promieniu $R = 5$ cm? Zakładamy, że rtęć doskonale nie zwilża szkła. Napięcie powierzchniowe rtęci $\alpha = 0{,}5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
Rozwiązanie na str. 14