Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2000

Zadania z fizyki nr 286, 287

Redaguje Jerzy B. BROJAN

286. Ocenić orientacyjnie maksymalną ilość (masę) tlenu, jaką może zawierać butla stalowa o rozsądnych rozmiarach i masie $m = 40$ kg, napełniona pod ciśnieniem równym połowie wartości, która spowodowałaby rozerwanie butli. Dane dotyczące stali wziąć z tablic.

287. Mion rozpada się na elektron i dwa neutrina:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Obliczyć maksymalną energię kinetyczną elektronu powstałego z rozpadu spoczywającego mionu. Masa mionu wynosi 105,6 MeV/c^2, masa elektronu – 0,51 MeV/c^2, a masę neutrin należy pominąć.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 276 (WT=2,20) i 277 (WT=1,64) z numeru 4/1999

Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	37,99
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	30,41
Tomasz Wietecha	– Tarnów	29,89
Aleksander Surma	– Myszków	25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	17,26
Jarosław Łazuka	– Warszawa	13,90
Grzegorz Miłoś	– Mielec	11,52
Tomasz Rudny	– Warszawa	11,46

Zadania z matematyki nr 389, 390

Redaguje Marcin E. KUCZMA

389. W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym" (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę. (Gracz A pokonał gracza C *pośrednio*, jeśli pokonał pewnego zawodnika B, który wygrał z C.) Dowieść, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

390. Prostokąt o bokach długości a, b $(a \geq b)$ dzielimy w dowolny sposób na n prostokącików o bokach równoległych do boków dużego prostokąta; n jest ustaloną liczbą naturalną. Dla każdego prostokącika obliczamy stosunek długości krótszego boku do długości dłuższego boku, a następnie obliczamy sumę tych stosunków. Znaleźć kres dolny wartości takich sum.

Zadanie **390** zaproponowała pani Joanna Jaszuńska z Warszawy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań 377 (WT=1,70) i 378 (WT=1,52) z numeru 3/1999

Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07
Piotr Kumor	– Olsztyn	35,79
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12

Rozwiązanie zadania M 899.
Niech l_n będzie prostą o równaniu $ax + by = n$. Z zadania **M 898** wynika, że każda prosta l_n dla $n \in \mathbb{Z}$ ma dokładnie jeden punkt kratowy w pasie $\{(x,y) | 0 \leq x \leq b-1\}$. Poza tym punkt ten ma obie współrzędne nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $n \notin M$. Rozważmy teraz symetrię środkową σ płaszczyzny względem punktu $\left(\frac{b-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, która jest dana wzorem $(x,y) \mapsto (b-1-x, -1-y)$. Zauważmy, że pas $\{(x,y) | 0 \leq x \leq b-1\}$ przechodzi przy σ na siebie, a punkty kratowe z tego pasa o współrzędnych nieujemnych przechodzą na punkty kratowe z tego pasa o współrzędnej y ujemnej i na odwrót. Tak więc proste l_n dla $n \in M$ przechodzą na proste l_m dla $m \notin M$ i na odwrót. Jak nietrudno obliczyć, obrazem prostej l_n w symetrii σ jest prosta $l_{ab-a-b-n}$. Oczywiste jest, że $\min(\mathbb{Z} \setminus M) = 0$, z czego wynika, że $\max M = ab - a - b$.

Rozwiązanie zadania M 900.
Oznaczmy $c = \max M$. Jak pokazano w rozwiązaniu zadania **M 899**, prosta l_n przechodzi na l_{c-n} i na odwrót. Poza tym proste l_n dla $n \in M$ przechodzą przy σ na proste l_m dla $m \notin M$ i na odwrót. Stąd wynika już teza zadania.

Rozwiązanie zadania F 511.
Warstwa wody między płytkami jest ograniczona po bokach meniskiem wklęsłym o promieniu krzywizny równym połowie grubości warstwy wody $R = \frac{1}{2}d$. Napięcie powierzchniowe wywołuje ujemne ciśnienie – ciecz jest rozciągana. Pod meniskiem wklęsłym nadwyżka p ciśnienia zewnętrznego, działającego na powierzchnię płytek S, wynosi

$$p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}.$$

A więc siła, którą należy przyłożyć, aby oderwać płytki od siebie, jest równa

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d} S.$$

Pole zwilżanej powierzchni płytek wynosi

$$S = \frac{V}{d} = \frac{m}{\rho d}.$$

Ostatecznie

$$F = \frac{2\alpha m}{\rho d^2} = 14600 \text{ N}.$$