Jeszcze raz o nierównych średnich

Piotr GOLDSTEIN

Na łamy *Delty* wraca od czasu do czasu temat nierówności między średnią arytmetyczną, $A_n = (a_1 + \ldots + a_n)/n$, a geometryczną, $G_n = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}$, gdzie a_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) są dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, a n jest liczbą naturalną. Znane twierdzenie głosi, że po pierwsze

$$(1) \qquad A_n \geq G_n\,,$$

a po drugie, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_i są równe.

Pomysł sprzed lat (kiedyś nie spodobał mi się dowód podany na wykładzie, więc znalazłem własny) wciąż wydaje mi się prostszy od innych. Teraz dzielę się nim z Czytelnikami *Delty*. W dowodzie używa się, co prawda, nierówności Bernoulliego

$$(2) \qquad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \qquad \text{dla wszystkich } \alpha \geq -1 \text{ i } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 0$ lub $n = 1$ lub $\alpha = 0$), ale tę nierówność zna chyba każdy, kto uczył się zasady indukcji matematycznej – np. w podręczniku Anusiaka dla drugiej klasy liceum jej udowodnienie jest treścią jednego z zadań.

Przypadek, gdy któreś a_i jest równe zeru, jest banalny (Czytelnik sam domyśli się, dlaczego), więc nierówność (1) udowodnimy przy założeniu, że wszystkie a_i są dodatnie. Wtedy, oczywiście, obie rozważane średnie też są dodatnie.

A oto dowód (1) przez indukcję.
1. Dla $n = 1$ jest $A_1 = a_1 = G_1$.
2. Załóżmy, że dla pewnej liczby $k \geq 1$ zachodzi nierówność $A_k \geq G_k$. Mamy wtedy

$$(3) \qquad \begin{aligned} (A_{k+1})^{k+1} &= \left(\frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \\ &= \left(\frac{k}{k+1}A_k + \frac{a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = (A_k)^{k+1}(1+\alpha)^{k+1}\,, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $\alpha = a_{k+1}/[(k+1)A_k] - 1/(k+1)$. Liczba α spełnia założenia nierówności Bernoulliego, $\alpha \geq -1$, bo pierwszy składnik jest nieujemny, a drugi równy co najmniej $-1/2$. Na mocy nierówności Bernoulliego prawa strona (3) spełnia warunek

$$(4) \qquad (A_k)^{k+1}(1+\alpha)^{k+1} \geq (A_k)^{k+1}(1+(k+1)\alpha) = (A_k)^k a_{k+1}\,.$$

Z założenia indukcyjnego mamy więc

$$(5) \qquad (A_{k+1})^{k+1} \geq (G_k)^k a_{k+1} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = (G_{k+1})^{k+1}\,.$$

Ponieważ A_{k+1} i G_{k+1} są dodatnie, z nierówności (5) wynika ostatecznie, że $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. Zasada indukcji daje tezę twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych n.

Nietrudno rozszerzyć ten dowód tak, by za jednym zamachem wykazać prawdziwość drugiej części twierdzenia. Do założenia indukcyjnego dołączamy jeszcze warunek: $A_k = G_k \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_k$. Nierówność Bernoulliego dla wykładników większych od 1 (takich, jak rozważane przez nas $k+1$) przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$, czyli gdy $a_{k+1} = A_k$. Razem oznacza to, że $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. Indukcja daje tezę.

Podstawy matematyki w wieku XX 2. Zbiory

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Część pierwsza tego artykułu ukazała się w *Delcie* 9/1999.

W roku 1900 odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyczny, na którym Hilbert wygłosił referat pt. „Problemy Matematyczne". Nadzwyczaj jasno Hilbert opisuje tam rolę matematyki i proces twórczości matematyka. Po owym interesującym wstępie autor przedstawia 23 otwarte problemy. Trzy z nich (nr 1, 2 i 10) dotyczą podstaw matematyki.

Problem nr 1 należał do teorii mnogości i pochodził od Cantora. Była to tak zwana hipoteza continuum (czy istnieją nieskończone zbiory liczb rzeczywistych, które nie są równoliczne ani ze zbiorem liczb naturalnych, ani z całym zbiorem liczb rzeczywistych). Problem nr 2 należał do logiki (czy układ aksjomatów arytmetyki lub analizy jest niesprzeczny), a problem nr 10 dotyczył teorii obliczalności (czy istnieje algorytm rozstrzygający istnienie całkowitych rozwiązań równań algebraicznych o współczynnikach całkowitych). Tak więc trzy wspomniane wyżej główne tematy podstaw pojawiły się już w wykładzie Hilberta.

Kwestia rozumienia pojęcia zbioru zajmowała (i zajmuje nadal) matematyków badających podstawy przez cały wiek XX. Naiwne podejście do tego pojęcia, zaproponowane przez Fregego i Russella (każda klasa, którą wymyślę, jest zbiorem), doprowadziło do sprzeczności, bowiem nieco później Russell zauważył, co następuje: rozpatrzmy klasę zbiorów R, którą we współczesnej notacji definiujemy: $\{x : x \notin x\}$. Zapytajmy, czy R jest zbiorem. Jeśli tak jest, to, zgodnie z formułą definiującą R, mamy natychmiast równoważność:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Zatem R nie może być zbiorem. Stało się jasne, że pojęcie zbioru musi zostać sprecyzowane tak, aby nie doprowadzało do sprzeczności. Nie oznacza to, że społeczność matematyczna (w szczególności Cantor) kiedykolwiek przyjmowała za prawdziwy schemat