Zasada nieoznaczoności w pociągu

Grzegorz WROCHNA

Jednym z podstawowych, a jednocześnie „tajemniczych” wyników mechaniki kwantowej jest zasada nieoznaczoności. Według niej niemożliwe jest jednoczesne określenie położenia i prędkości danego obiektu z dowolną dokładnością. Ściślej, iloczyn niepewności wyznaczenia położenia Δx i pędu Δp nie może być mniejszy niż połowa stałej Plancka $\hbar = h/2\pi = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Js, czyli

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2.$$

Wynik ten jest o tyle szokujący, że w mechanice klasycznej bez dokładnej znajomości położenia i pędu nie możemy nic powiedzieć o ewolucji układu. Dlatego często w popularnych przedstawieniach mechaniki kwantowej zasada nieoznaczoności ukazywana jest jako coś niezwykłego. W niniejszym artykule spróbujemy rozjaśnić nieco tę tajemniczość, odwołując się do prostej analogii.

Wyobraźmy sobie, że stoimy na peronie i chcemy zmierzyć prędkość przejeżdżającego pociągu. Do dyspozycji mamy zegarek i wiemy, że każdy wagon ma długość $\lambda = 20$ m. Pomiaru prędkości możemy dokonać, odmierzając zegarkiem określony odcinek czasu t i licząc wagony, które w tym czasie nas minęły. Jeśli minęło nas n wagonów, to pokonana przez pociąg droga wynosi $l = n\lambda$ z dokładnością do $\Delta l = \lambda/2$. W wyniku pomiaru otrzymamy prędkość

$$v = \frac{l}{t} = \frac{n\lambda}{t}$$

z dokładnością

$$\Delta v = \frac{\Delta l}{t} = \frac{\lambda}{2t} = \frac{v}{2n}.$$

Ze wzoru w sposób oczywisty wynika, że im większy interwał czasu, czy też im dłuższą drogę wybieramy, tym dokładniejszy będzie pomiar prędkości. Pamiętać jednak należy, że zawsze będzie to prędkość **średnia** na odcinku $l = n\lambda$. Innymi słowy, położenie pociągu x w chwili pomiaru znane jest z dokładnością $\Delta x = l/2 = n\lambda/2$. Mamy więc sytuację typową dla zasady nieoznaczoności: możemy niezbyt precyzyjnie zmierzyć prędkość na krótkim odcinku, ale w dość dobrze określonym miejscu, lub uzyskać dużą dokładność pomiaru prędkości średniej, rezygnując z precyzyjnego określenia miejsca. Ujmując rzecz matematycznie,

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{v\lambda}{4}$$

lub w języku pędu

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{p\lambda}{4}. \tag{1}$$

W mechanice kwantowej położenie cząstki można opisać za pomocą tzw. paczki falowej. Paczka falowa to fala, której amplituda jest istotnie różna od zera dla skończonej liczby okresów n, a więc w ograniczonym obszarze $l = n\lambda$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki koncentruje się w tym właśnie obszarze. Długość λ fali wyznaczona jest przez pęd p cząstki

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{2}$$

W naszej analogii każdy wagon pociągu odpowiada jednemu

Podstawy matematyki w wieku XX

1. Wstęp

Wiktor MAREK, Jan MYCIELSKI

Autorzy dziękują za wnikliwe uwagi p. Mirosławowi Truszczyńskiemu.

Podstawy są dziedziną matematyki zajmującą się poprawnością rozumowań matematycznych, podstawowymi strukturami matematyki (takimi, które pozwalają zdefiniować wszelkie inne struktury) oraz efektywnością obliczeń matematycznych. Te trzy obszary skrystalizowały się w XX wieku w postaci trzech dużych rozdziałów matematyki: *logiki matematycznej*, *teorii mnogości* i *teorii obliczalności*. Postaramy się opisać rozwój każdego z tych trzech rozdziałów podstaw. Oczywiście, opis nasz będzie, z konieczności, raczej pobieżnym szkicem.

W wieku dwudziestym podstawami matematyki zajmowali się bardzo znani matematycy i filozofowie, np. Cantor, Frege, Hilbert, Russell, Gödel, Tarski, Kleene, Martin, Skolem, Solovay, Shelah i Turing. Oczywiście, spotkamy poniżej wiele innych nazwisk – lista ta jest bardzo niekompletna. W Polsce, oprócz Tarskiego, badali podstawy: Chwistek, Ehrenfeucht, Grzegorczyk, Jaśkowski, Leśniewski, Lindenbaum, Łoś, Mostowski, Rasiowa, Sikorski, autorzy tego artykułu i wielu innych. Podręczniki logiki i podstaw (często książki bardzo obszerne) zawierają głównie wyniki badań matematyków dwudziestowiecznych. Obiektywne streszczenie dwudziestowiecznego rozwoju podstaw nie jest zatem zadaniem prostym, szczególnie że musimy to wszystko zmieścić na kilkunastu stronach maszynopisu. Ograniczymy się zatem do omówienia najistotniejszych rezultatów, m.in. twierdzeń Gödla o zupełności logiki pierwszego rzędu i o niezupełności bogatszych teorii matematycznych, niektórych twierdzeń o niezależności, informacji o roli aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynalnych itd.

Popatrzmy najpierw na stosunek podstaw matematyki do reszty matematyki. Nasuwa się nam następująca analogia. Dobry mechanik samochodowy nie musi znać termodynamiki (na której opiera się funkcjonowanie samochodów). Podobnie dobry matematyk, który nie ma pretensji do głębszego wykształcenia poza swoją specjalnością, nie musi znać podstaw matematyki. Co więcej, popularyzacja termodynamiki wśród mechaników samochodowych nie jest zadaniem łatwym – i na podobne trudności napotyka popularyzacja podstaw matematyki wśród matematyków. Niektórych matematyków irytuje sam fakt, że ktoś o zainteresowaniach filozoficznych usiłuje opisać, choćby w części, funkcjonowanie ich umysłów i wyjaśniać w abstrakcyjny sposób, czym jest matematyka. Podkreślają oni, że matematyka, jaką znamy, uprawiana jest od tysiącleci i osiągnęła wielkie sukcesy na polu opisywania rzeczywistości bez tego, by ktoś wyjaśniał jej naturę. Ale podstawy dają *matematyczną* teorię tego, czym jest matematyka, tak jak fizyka daje matematyczną teorię różnych innych zjawisk i procesów fizycznych. Jest naturalne, że – jak każdy opis rzeczywistości fizycznej – podstawy są niekompletne i stale są rozwijane i ulepszane.

Ponieważ podstawy traktują matematykę jako zjawisko fizyczne (proces konstrukcji pewnych tekstów), należy dodać, iż istnieją filozofowie i matematycy, którzy myślą, że ten punkt widzenia jest nierozsądny, że coś zaciemnia. Wierzą oni, iż matematyka jest nauką, która bada świat idei platońskich (które są transcendentalne, czyli istnieją poza światem fizycznym, niezależnie od ludzkości).

Gödel, o którym będziemy pisać wiele w tym artykule, reprezentował tę opinię.

A zatem, że matematyka nie jest zjawiskiem czysto fizycznym, bo ma na nią bezpośredni wpływ świat pozafizycznych idei.

Jednakże matematyczne podstawy matematyki obywają się bez takich założeń i prowadzą do czysto fizykalnego i nader kompletnego opisu zjawiska, jakim jest matematyka. Dlatego liczni filozofowie i matematycy (w tym autorzy tego artykułu) odrzucają platonizm, jako założenie sprzeczne z „brzytwą Ockhama" (tj. tym, że najprostsze teorie zgodne z faktami, czyli „nie mnożące bytów ponad potrzebę", są najbardziej przekonywające).

Jak wspomnieliśmy wyżej, łatwo wykazać niekompletność współczesnych podstaw. Na przykład *nie* tłumaczą one, czym jest dobra matematyka. Wierzymy, że matematyka ma strukturę postaci: aksjomaty-definicje-twierdzenia-dowody,

okresowi takiej fali. Możemy więc podstawić (2) do (1) i otrzymamy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar.$$

Pominęliśmy tu czynnik $2\pi/4$, gdyż niezbyt precyzyjna definicja Δx i Δp pozwala nam jedynie na dość grube oszacowanie.

Do podobnego rezultatu możemy dojść także w inny sposób, nie posługując się bezpośrednio formalizmem falowym. Zauważmy, że uzyskana „zasada nieoznaczoności" (1) jest konsekwencją „skwantowania" drogi, którą mierzyliśmy w dyskretnych jednostkach λ. Podobną rolę odgrywa w mechanice kwantowej wielkość fizyczna S zwana działaniem. Zazwyczaj działanie definiujemy jako całkę względem czasu z różnicy między energią kinetyczną i potencjalną. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego działanie można wyrazić iloczynem pędu p i drogi l,

$$S = \frac{pl}{2}.$$

Według mechaniki kwantowej działanie można określić z dokładnością rzędu stałej Plancka $\hbar$,

$$\Delta S \gtrsim \hbar.$$

Postać kwantowomechanicznej zasady nieoznaczoności możemy zatem odgadnąć przez analogię, zastępując we wzorze (1) kwant drogi λ kwantem działania $\hbar$. Przybierze on wówczas postać

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Przedstawiona analogia, choć nie jest formalnym wyprowadzeniem, dobrze ilustruje jedną z podstawowych idei mechaniki kwantowej: niemożność jednoczesnego określenia położenia i pędu z dowolną dokładnością jest wynikiem istnienia kwantu działania $\hbar$.

Ułamki łańcuchowe okresowe

Marcin MAZUR

Ułamki łańcuchowe pojawiały się niejednokrotnie (ostatnio: w kwietniu 1999) na łamach *Delty*. Następujące ciekawe twierdzenie o nich udowodnił w roku 1770 francuski matematyk Lagrange.

Twierdzenie 1. *Liczba niewymierna x ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.*

Zetknąłem się z tym twierdzeniem jako uczeń szkoły średniej. Niestety, żadne dostępne mi wówczas źródła nie podawały dowodu. Nabrałem przez to przekonania, że dowód ów musi być niezmiernie skomplikowany i nie wierzyłem, że mógłbym twierdzenie Lagrange'a udowodnić sam, a – jak wiadomo – „bez wiary nie da się niczego udowodnić".

Okazuje się jednak, że dowód wymaga wyłącznie pewnej spostrzegawczości i władania indukcją matematyczną; jest w zasięgu zdolnego ucznia szkoły średniej, o czym postaram się przekonać Czytelnika poniżej.