do głębszego wykształcenia poza swoją specjalnością, nie musi znać podstaw matematyki. Co więcej, popularyzacja termodynamiki wśród mechaników samochodowych nie jest zadaniem łatwym – i na podobne trudności napotyka popularyzacja podstaw matematyki wśród matematyków. Niektórych matematyków irytuje sam fakt, że ktoś o zainteresowaniach filozoficznych usiłuje opisać, choćby w części, funkcjonowanie ich umysłów i wyjaśniać w abstrakcyjny sposób, czym jest matematyka. Podkreślają oni, że matematyka, jaką znamy, uprawiana jest od tysiącleci i osiągnęła wielkie sukcesy na polu opisywania rzeczywistości bez tego, by ktoś wyjaśniał jej naturę. Ale podstawy dają *matematyczną* teorię tego, czym jest matematyka, tak jak fizyka daje matematyczną teorię różnych innych zjawisk i procesów fizycznych. Jest naturalne, że – jak każdy opis rzeczywistości fizycznej – podstawy są niekompletne i stale są rozwijane i ulepszane.

Ponieważ podstawy traktują matematykę jako zjawisko fizyczne (proces konstrukcji pewnych tekstów), należy dodać, iż istnieją filozofowie i matematycy, którzy myślą, że ten punkt widzenia jest nierozsądny, że coś zaciemnia. Wierzą oni, iż matematyka jest nauką, która bada świat idei platońskich (które są transcendentalne, czyli istnieją poza światem fizycznym, niezależnie od ludzkości).

Gödel, o którym będziemy pisać wiele w tym artykule, reprezentował tę opinię.

A zatem, że matematyka nie jest zjawiskiem czysto fizycznym, bo ma na nią bezpośredni wpływ świat pozafizycznych idei.

Jednakże matematyczne podstawy matematyki obywają się bez takich założeń i prowadzą do czysto fizykalnego i nader kompletnego opisu zjawiska, jakim jest matematyka. Dlatego liczni filozofowie i matematycy (w tym autorzy tego artykułu) odrzucają platonizm, jako założenie sprzeczne z „brzytwą Ockhama" (tj. tym, że najprostsze teorie zgodne z faktami, czyli „nie mnożące bytów ponad potrzebę", są najbardziej przekonywające).

Jak wspomnieliśmy wyżej, łatwo wykazać niekompletność współczesnych podstaw. Na przykład *nie* tłumaczą one, czym jest dobra matematyka. Wierzymy, że matematyka ma strukturę postaci: aksjomaty-definicje-twierdzenia-dowody,

okresowi takiej fali. Możemy więc podstawić (2) do (1) i otrzymamy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar.$$

Pominęliśmy tu czynnik $2\pi/4$, gdyż niezbyt precyzyjna definicja Δx i Δp pozwala nam jedynie na dość grube oszacowanie.

Do podobnego rezultatu możemy dojść także w inny sposób, nie posługując się bezpośrednio formalizmem falowym. Zauważmy, że uzyskana „zasada nieoznaczoności" (1) jest konsekwencją „skwantowania" drogi, którą mierzyliśmy w dyskretnych jednostkach λ. Podobną rolę odgrywa w mechanice kwantowej wielkość fizyczna S zwana działaniem. Zazwyczaj działanie definiujemy jako całkę względem czasu z różnicy między energią kinetyczną i potencjalną. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego działanie można wyrazić iloczynem pędu p i drogi l,

$$S = \frac{pl}{2}.$$

Według mechaniki kwantowej działanie można określić z dokładnością rzędu stałej Plancka $\hbar$,

$$\Delta S \gtrsim \hbar.$$

Postać kwantowomechanicznej zasady nieoznaczoności możemy zatem odgadnąć przez analogię, zastępując we wzorze (1) kwant drogi λ kwantem działania $\hbar$. Przybierze on wówczas postać

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Przedstawiona analogia, choć nie jest formalnym wyprowadzeniem, dobrze ilustruje jedną z podstawowych idei mechaniki kwantowej: niemożność jednoczesnego określenia położenia i pędu z dowolną dokładnością jest wynikiem istnienia kwantu działania $\hbar$.

Ułamki łańcuchowe okresowe

Marcin MAZUR

Ułamki łańcuchowe pojawiały się niejednokrotnie (ostatnio: w kwietniu 1999) na łamach *Delty*. Następujące ciekawe twierdzenie o nich udowodnił w roku 1770 francuski matematyk Lagrange.

Twierdzenie 1. *Liczba niewymierna x ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.*

Zetknąłem się z tym twierdzeniem jako uczeń szkoły średniej. Niestety, żadne dostępne mi wówczas źródła nie podawały dowodu. Nabrałem przez to przekonania, że dowód ów musi być niezmiernie skomplikowany i nie wierzyłem, że mógłbym twierdzenie Lagrange'a udowodnić sam, a – jak wiadomo – „bez wiary nie da się niczego udowodnić".

Okazuje się jednak, że dowód wymaga wyłącznie pewnej spostrzegawczości i władania indukcją matematyczną; jest w zasięgu zdolnego ucznia szkoły średniej, o czym postaram się przekonać Czytelnika poniżej.

Zacznijmy od przypomnienia niezbędnych pojęć. Dla dowolnej liczby niewymiernej α określimy ciąg liczb rzeczywistych (a_k) i ciąg liczb całkowitych n_k, jak następuje:

$$(\star) \qquad a_0 = \alpha, \quad a_{k+1} = \frac{1}{\{a_k\}}, \quad n_k = [\,a_k\,].$$

Przez $[\,x\,]$ i $\{x\}$ oznaczamy odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby x. Ograniczamy się tu do liczb niewymiernych – dla wymiernych α otrzymalibyśmy $a_k \in \mathbb{Z}$, dla pewnego k, i wówczas definicja liczby a_{k+1} nie miałaby sensu. Zauważmy, że $a_k > 1$ i $n_k \geq 1$ dla każdego $k > 0$. Odnotujmy ponadto równości $a_k = n_k + 1/a_{k+1}$. Przez indukcję dowodzimy, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$ jest

$$\alpha = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}.$$

Wynika stąd, że ciąg liczb wymiernych

$$n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k}}} = [\,n_0; n_1; \ldots; n_k\,]$$

jest zbieżny do liczby α. Piszemy $\alpha = [\,n_0; n_1; n_2; \ldots]$, a ciąg (n_i) nazywamy *rozwinięciem liczby α na ułamek łańcuchowy*. Okazuje się, że każda liczba niewymierna ma jednoznaczny zapis postaci $[\,n_0; n_1; n_2; \ldots]$ dla pewnych całkowitych $n_0, n_1 > 0, n_2 > 0, \ldots$ danych wzorami $(\star)$ i odwrotnie, każdy taki ciąg odpowiada pewnej liczbie niewymiernej. Ułamki łańcuchowe stanowią więc swoisty sposób zapisywania liczb rzeczywistych, podobnie jak znacznie bardziej rozpowszechniony zapis dziesiętny. Następująca prosta obserwacja będzie dla naszych rozważań bardzo użyteczna: jeśli $\beta = [\,n_{k+1}; n_{k+2}; \ldots]$, to wówczas

$$(\star\star) \qquad \alpha = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \cfrac{1}{\beta}}}}.$$

Powiemy, że liczba niewymierna x ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jeśli

$$x = [\,l_0; l_1; \ldots; l_i; m_1; m_2; \ldots; m_k; m_1; m_2; \ldots; m_k; m_1 \ldots].$$

Piszemy wówczas $x = [\,l_0; l_1; \ldots; l_i; \overline{m_1; m_2; \ldots; m_k}\,]$. Zauważmy, że jeśli $\alpha = [\,m_0; \overline{m_1; m_2; \ldots; m_k}\,]$, to wobec $(\star\star)$ otrzymujemy równość

$$\alpha = m_0 + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ddots + \cfrac{1}{m_k + \cfrac{1}{\alpha}}}} = \frac{A\alpha + B}{C\alpha + D}$$

ale nie wiemy, dlaczego niektóre prace matematyków wprawiają nas w zachwyt, a inne wydają się pozbawione pomysłów lub wręcz nudne. Podstawy nie tłumaczą też, *jak* matematycy budują dowody swych przypuszczeń. Ponieważ nie mamy dobrego modelu procesu budowy dowodów, jest więc jeszcze daleko do prawdziwie efektywnego automatycznego dowodzenia twierdzeń (choć i w tej dziedzinie osiągnięto spektakularne sukcesy).

Jak żąda tego nasza definicja, na wykładach podstaw matematyki studenci poznają zazwyczaj logikę matematyczną, teorię mnogości oraz wprowadzenie do teorii obliczalności (rekursji). Wszystkie te części podstaw są ze sobą powiązane i w historii, którą poniżej przedstawimy, będą przenikać się wzajemnie. Ale zapytajmy najpierw, jaki był ich stan w roku 1900.

Logika miała zawsze co najmniej dwa aspekty – matematyczny i filozoficzny. Aspekt filozoficzny pochodzi od starożytnych Greków. Filozofia wymagała pewnej precyzji rozumowania. W tym celu filozofowie greccy, przede wszystkim Arystoteles, chcieli zrozumieć, czym są poprawne dowody. Sformułowali więc sylogistykę, kodyfikującą niektóre poprawne rozumowania. Z punktu widzenia dzisiejszej logiki były to reguły dotyczące relacji jednoargumentowych, czyli unarnych. Tak więc, jeśli Sokrates jest Grekiem, a wszyscy Grecy są śmiertelni, to i Sokrates jest śmiertelny. Dziś zapisalibyśmy ten sylogizm jako

$$[\,grek(S) \wedge \forall x(grek(x) \Rightarrow \acute{s}miertelny\,(x))\,] \Rightarrow \acute{s}miertelny\,(S).$$

$grek\,(\cdot)$ i $\acute{s}miertelny\,(\cdot)$ są w tej formule symbolami do opisu relacji unarnych. Użyliśmy tu kwantyfikatora ogólnego $\forall x$ (dla każdego x). Podobnie wprowadza się kwantyfikator egzystencjalny $\exists x$ (istnieje x).

Grecy nie formalizowali sylogizmów za pomocą formuł. Niemniej jednak analizowali sylogizmy i przez ponad dwa tysiące lat teoria sylogizmów stanowiła centrum logiki. Matematycy starożytni rozumowali podobnie jak my, intuicyjnie rozumieli, co jest poprawnym dowodem matematycznym, a co nim nie jest. Dowody, które wymyślili, są po dziś dzień wykładane w szkołach i spełniają dzisiejsze standardy ścisłości. W wieku XVII Leibniz miał nadzieję stworzenia *lingua universalis*, języka, który pozwalałby wyrazić zdania matematyki, i *calculus ratiocinator*, który by sprowadzał rozumowania do rachunków.

W połowie XIX wieku Boole wprowadził, przez analogię z algebrą liczb, algebrę zdań. Dalszy rozwój logiki zawdzięczamy De Morganowi, Peirce'owi, Fregemu i innym matematykom i filozofom. Było rzeczą jasną, że logika, jaką posługuje się matematyka, wykracza poza sylogistykę, już choćby dlatego, że zajmuje się nie tylko relacjami unarnymi, lecz także takimi, które wiążą więcej niż jeden obiekt. Na przykład, podstawowa w matematyce relacja mniejszości wśród liczb nie jest unarna, lecz binarna, bo wiąże pary elementów.

Rozwój analizy matematycznej w wieku XVIII i brak dostatecznie jasnych definicji ciągłości, granicy funkcji i innych podstawowych pojęć analizy spowodował, że trzeba było sprecyzować takie pojęcia, jak liczba rzeczywista, ciąg, funkcja, etc. Pytanie, czym są liczby rzeczywiste, przewijało się w pracach wielu matematyków i filozofów dziewiętnastowiecznych. Trzeba było zdefiniować (by użyć terminologii informatycznej), jakie są podstawowe „struktury danych" matematyki. Epokowa książka Dedekinda z r. 1883, *Was sind und was sollen die Zahlen* zawierała następujące stwierdzenie: „W nauce, co dowód posiada, nie powinno być bez dowodu przyjęte". Dedekind *udowodnił* podstawowe własności liczb rzeczywistych, własności, które poprzednio przyjmowano jako oczywiste. Stąd też pod koniec wieku XIX nadszedł czas budowy podstaw matematyki.

Spośród wielu matematyków, którzy przyczynili się do rozpoznania podstawowych matematycznych struktur, najważniejszym był G. Cantor, który udowodnił, że wszystkie przedmioty, jakie rozważają matematycy, można rozumieć jako zbiory. Co więcej, okazało się, że taka interpretacja usuwa wszystkie niejasności, które dawniej pojawiały się w matematyce. Na przykład, za pomocą pojęcia zbioru łatwo zdefiniować pojęcie liczby naturalnej, stąd zaś liczby całkowitej i wymiernej. Jak pokazał Dedekind (i niezależnie Cantor), przy użyciu pojęcia zbioru (nieco trudniej) definiuje się też liczby rzeczywiste.

Pojęcie zbioru par pozwala zdefiniować z kolei pojęcie funkcji. Podejście takie zrywało z poprzednio używanym pojęciem funkcji jako przepisu, algorytmu, który z elementami dziedziny pozwalał łączyć wartości. W latach 80. i 90. XIX wieku Cantor udowodnił wiele twierdzeń teorii

dla pewnych liczb całkowitych A, B, C, D. Zatem α jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $Cz^2 + (D - A)z - B$ o współczynnikach całkowitych. Ponownie używając $(\star\star)$, otrzymujemy

$$x = l_0 + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{l_2 + \ddots + \cfrac{1}{l_i + \cfrac{1}{\alpha}}}} = \frac{K\alpha + L}{M\alpha + N}$$

dla pewnych liczb całkowitych K, L, M, N. Zatem x jest również pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Tym samym udowodniliśmy, że liczba niewymierna, która ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jest pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Fakt ten został odnotowany już przez Eulera. Nieco trudniejszy dowód twierdzenia odwrotnego podał po raz pierwszy Lagrange.

Załóżmy teraz, że liczba niewymierna α jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ o współczynnikach całkowitych. Dobrze znane wzory na pierwiastki równania kwadratowego dają $\alpha = \dfrac{\sqrt{d} + u}{w}$, gdzie $d = b^2 - 4ac$, $u = \pm b$ i odpowiednio $w = \mp 2a$. Wykażemy, że odpowiadające liczbie α ciągi a_k i n_k, określone wzorem $(\star)$, są okresowe.

Oczywiście $w|(d - u^2)$. Ta prościutka obserwacja jest kluczowa dla całego dowodu. Istotnie, zauważmy, że

$$a_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{d} + u}{w} - n_0} = \frac{\sqrt{d} + wn_0 - u}{\dfrac{d - (wn_0 - u)^2}{w}} = \frac{\sqrt{d} + u_1}{w_1},$$

gdzie $u_1 = wn_0 - u$ i $w_1 = \dfrac{d - u_1^2}{w}$. Skoro zaś $w|(d - u^2)$, to liczby u_1, w_1 są całkowite oraz $w_1|(d - u_1^2)$. Stosując powyższe rozumowanie do liczby a_1, otrzymamy, że $a_2 = \dfrac{\sqrt{d} + u_2}{w_2}$, gdzie $u_2 = w_1 n_1 - u_1$, $w_2 = \dfrac{d - u_2^2}{w_1}$ są liczbami całkowitymi i $w_2|(d - u_2^2)$. Oczywista indukcja dowodzi, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 0$ mamy $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k}$, gdzie liczby całkowite u_k, w_k określone są rekurencyjnie następująco:

$$u_0 = u, \quad w_0 = w, \quad u_{k+1} = n_k w_k - u_k, \quad w_k w_{k+1} = d - u_{k+1}^2.$$

Odnotujmy równości $a_k = \dfrac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} = \dfrac{w_{k-1}}{\sqrt{d} - u_k}$.

By osiągnąć cel i wykazać, iż ciąg a_k jest okresowy, wystarczy sprawdzić, że dla pewnych $s < t$ mamy $a_s = a_t$ (dlaczego?), co jest równoważne równościom $u_s = u_t$ i $w_s = w_t$. Ostatnie równości otrzymamy, jeśli uda nam się uzasadnić, że ciągi u_k i w_k są ograniczone. Istotnie, ponieważ ciągi te mają wyrazy całkowite, więc ciąg par (u_k, w_k) ma wówczas tylko skończenie wiele różnych wartości i dla pewnych $s < t$ mamy $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$.

Przystąpmy więc do dowodu ograniczoności ciągów u_k i w_k. Wynika on z następujących trzech obserwacji:

1. Jeśli $u_k < -\sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k < 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d}+u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k < 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d}-u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} < 0$, tzn. $u_{k+1} > \sqrt{d} > 0$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k < -u_k$, więc $|u_{k+1}| < |u_k|$.

2. Jeśli $u_k > \sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k > 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d}+u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k > 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d}-u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$, tzn. $u_{k+1} < \sqrt{d} < u_k$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k$, więc $|u_{k+1}| < |u_k|$.

3. Jeśli $|u_k| < \sqrt{d}$ dla pewnego $k > 0$, to $\sqrt{d} + u_k > 0$, a ponieważ $a_k = \dfrac{\sqrt{d}+u_k}{w_k} > 1$, więc $w_k > 0$. Jako że $a_{k+1} = \dfrac{w_k}{\sqrt{d}-u_{k+1}} > 1$, musi być $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$, tzn. $u_{k+1} < \sqrt{d}$.
   Ponadto $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k > -\sqrt{d}$, więc $|u_{k+1}| < \sqrt{d}$.

Zauważmy teraz, że jeśli spełnione są nierówności $|u_i| > \sqrt{d}$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, to wówczas wobec własności 1 i 2 mamy $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_s| > \sqrt{d}$. Liczby u_i są całkowite, a zatem otrzymujemy stąd nierówności $\sqrt{d} < |u_s| \le |u_1| - s + 1$. W szczególności, musi być $s < |u_1| - \sqrt{d} + 1$. Innymi słowy, $|u_{k_0}| < \sqrt{d}$ dla pewnego $k_0 \le |u_1| - \sqrt{d} + 1$. Z własności 3 wynika więc, że $|u_k| < \sqrt{d}$ dla każdego $k \ge k_0$. Tym samym ciąg u_k jest ograniczony. Ponadto, nierówność $a_k = (\sqrt{d} + u_k)/w_k > 1$ pociąga za sobą nierówności $0 < w_k < 2\sqrt{d}$ dla $k \ge k_0$. Wykazaliśmy więc, że ciągi u_k i w_k są ograniczone i co za tym idzie, liczba α ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy. Dowód **Twierdzenia 1** jest zakończony.

Nasze rozważania pozwalają uzyskać nieco dokładniejszą informację. Niech k_1 będzie najmniejszą taką liczbą, że $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$. Oczywiście $k_1 \le k_0$. Łatwo zauważyć, że ciąg par (u_k, w_k), gdzie $k > k_1$, przyjmuje co najwyżej $\sqrt{d} \cdot 2\sqrt{d} = 2d$ różnych wartości.

Zatem istnieją takie $s < t$, że $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$ i $t - s < 2d$. Innymi słowy, okres podstawowy ułamka łańcuchowego, równego liczbie α, jest mniejszy niż $2d$. Czytelnik zdoła teraz bez trudu przekonać się, że zachodzi następujące

Twierdzenie 2. *Liczba niewymierna $(\sqrt{d} + u)/w$, gdzie u, w są liczbami całkowitymi i $w|(d - u^2)$, ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy postaci $[n_0; n_1; \ldots; n_i; \overline{n_{i+1}; \ldots; n_{i+j}}]$. Możemy przy tym przyjąć za i taką najmniejszą liczbę $k \ge 0$, że $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$ i wówczas $i \le \max(1, |u_1| - \sqrt{d} + 1)$. Ponadto $j < 2d$.*

W szczególności, dla $u = 0$ i $w = 1$ otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 3. *Dla pewnego $j < 2d$ mamy $\sqrt{d} = [n_0; \overline{n_1; \ldots; n_j}]$. Ponadto $n_j = 2n_0$.*

Ostatnia część twierdzenia wymaga dodatkowych wyjaśnień. Ponieważ $w_0 = 1$, mamy $w_{j+1} = w_1 = w_0 w_1 = d - u_1^2$. Jako że $w_j w_{j+1} = d - u_{j+1}^2 = d - u_1^2 = w_{j+1}$, więc $w_j = 1$ i $a_j = \sqrt{d} + u_j$. Zatem $0 < \sqrt{d} - u_j < 1$, tzn. $u_j = [\sqrt{d}] = n_0$. Tym samym $n_j = [a_j] = 2n_0$.

Jako przyjemne zadanie pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie, że dla $1 \le s < j$ zachodzą równości $n_s = n_{j-s}$. **Twierdzenie 3** można też wykorzystać do opisu rozwiązań równania Pella $x^2 - dy^2 = 1$ w liczbach całkowitych, ale to już zupełnie inna historia.

mnogości (zbiorów). Cantor zanalizował też pojęcia takie, jak porządek liniowy, wprowadził pojęcie dobrego porządku (a w konsekwencji i liczby porządkowej). Stąd już był tylko krok do dowodów używających indukcji pozaskończonej. Było to całkowicie nowe i silne narzędzie w rękach matematyków. Wyszło ono istotnie poza indukcję względem liczb naturalnych oraz repertuar dowodowy odziedziczony po Grekach.

Teoria obliczalności w końcu XIX wieku jeszcze nie istniała. Istniały tylko liczne przykłady algorytmów. Na przykład algorytm Euklidesa dla znajdowania największego wspólnego podzielnika lub algorytm Cardano rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Sprawy efektywności zajmowały matematyków i filozofów greckich, a także matematyków późniejszych. Newton i inni wielcy analitycy aż do połowy XIX wieku nie akceptowali prawdziwości zdań egzystencjalnych nie popartych algorytmem konstrukcji odpowiedniego przykładu. Jeśli więc twierdzili oni, na przykład, że równanie różniczkowe $y' = -y$ z warunkiem początkowym $y(1{,}3) = 17$ ma rozwiązanie, to trzeba było wiedzieć, jak owo rozwiązanie skonstruować, innymi słowy, podać przepis na obliczanie wartości takiej funkcji $y(\cdot)$.

Urządzenia ułatwiające liczenie znane są od starożytności. Liczydła różnych systemów potrzebne były do obliczeń. Wielu wynalazców, inżynierów i matematyków budowało maszyny, które ułatwiały obliczenia. Artyleria i finanse wymagały szczególnie wielu obliczeń (i często dość dokładnych). Stąd też ze sztabów wojskowych, urzędów podatkowych i banków pochodziło zapotrzebowanie na urządzenia liczące. Zostały wynalezione maszyny do dodawania i mnożenia, potrzebne w spisach ludności, i inne maszyny mechaniczne ułatwiające obliczenia. Ale pytania o istotę pojęcia obliczenia były rzadkie. W pierwszej połowie XIX wieku Babbage zaprojektował nawet rodzaj mechanicznego komputera używającego programów, ale pytanie, czym jest funkcja obliczalna, nie zostało jeszcze postawione.

Spróbujemy dalej przedstawić rozwój trzech głównych nurtów podstaw matematyki: teorii mnogości, logiki i teorii modeli, oraz teorii funkcji obliczalnych w wieku XX.

Część druga ukaże się w *Delcie* 11/1999.