Przykład, w którym abstrahuje się od wszelkich twierdzeń o ułamkach łańcuchowych

W praktyce ułamek łańcuchowy powstaje poprzez systematyczne wyłączanie całości i odwracanie pozostałego ułamka właściwego, aby znów było co wyłączać:

$$\frac{1517}{1073}=1+\frac{444}{1073}=1+\frac{1}{\frac{1073}{444}}=1+\frac{1}{2+\frac{185}{444}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{444}{185}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{74}{185}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{185}{74}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{37}{74}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}.$$

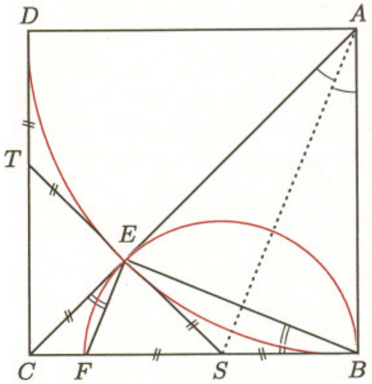
Dla liczby wymiernej operacja taka, oczywiście, zawsze się kończy. Gdy jednak ułamek łańcuchowy zwiniemy do postaci ułamka zwykłego, to otrzymamy jego postać skróconą:

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=1+\frac{1}{\frac{29}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}.$$

To, przez co został skrócony, można odnaleźć jako ostatnią „resztę" uzyskaną poprzednio przy wyłączaniu całości, tu akurat 37. Nie zawsze jest to liczba pierwsza (jak tutaj). Ale zawsze jest to największy wspólny dzielnik licznika i mianownika rozwijanego ułamka (a właściwie, dlaczego tak jest?).

Dokładnie taka sama – wyłączanie całości i odwracanie pozostałości – jest praktyka rozwijania w ułamek łańcuchowy liczb niewymiernych. Oto przykład rozwinięcia najprostszej niewymierności kwadratowej. Pierwszy raz na sposób arytmetyczny.

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=\ldots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}.$$



Jak widać, rzeczywiście otrzymuje się ułamek okresowy $[1;\overline{2}]$.

A teraz geometrycznie. W kwadracie $ABCD$ kreślimy okrąg o środku A i promieniu AB. Przecina on przekątną w punkcie E, przez który kreślimy styczną, otrzymując na bokach kwadratu punkty S i T. Kreślimy teraz okrąg o środku S i promieniu SB; przecina on BC w punkcie F. Tym, co trzeba zauważyć, są równości $SB=SE=ET=TD=SF=EC$ (rysunek) oraz podobieństwo trójkątów BCE i ECF (bo $\angle CBE=\angle CEF$, jako kąt wpisany i kąt dopisany, a kąt C jest wspólny).

Gdy to już wiemy, mamy:

$$\frac{AC}{AB}=1+\frac{CE}{CB}=1+\frac{1}{\frac{CB}{CE}}=1+\frac{1}{2+\frac{CF}{CE}}=1+\frac{1}{2+\frac{CE}{CB}}=\ldots=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}},$$

czyli tyle samo.

Zobaczyć, że faktycznie chodzi o niewymierność kwadratową, można tak.

Oznaczmy

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}.$$

Jest to równoważne

$$x + 1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}},$$

czyli $x + 1 = 2 + \frac{1}{x+1}$, co dla $x \neq -1$ jest równoważne $x^2 = 2$. Oczywiście, żeby tak pisać, trzeba wiedzieć, że nieskończony ułamek przedstawiający x jest zbieżny.

Można chwilę poćwiczyć i wykonywać podobnie zamianę danego nieskomplikowanego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych (oczywiście mającego pierwiastek) na ułamek łańcuchowy. Dla skomplikowanych potrzebny jest dowód z artykułu.

Warto tu przypomnieć inne twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych: dają one najlepsze przybliżenia wymierne liczb niewymiernych. Znaczy to tyle, że jeśli początkowy fragment ułamka łańcuchowego, dla jakiejś liczby niewymiernej a, jest zwykłym ułamkiem nieskracalnym, to lepsze przybliżenia wymierne a można otrzymać tylko używając ułamków o większym mianowniku. Tak więc (patrz początek tej notki) $\frac{41}{29}$ jest najlepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ spośród ułamków o mianownikach mniejszych od 30.

Ułamki łańcuchowe wymyślił grecki matematyk Teajtetos (410–368 p.n.e.), uczeń Platona. Mają więc te ułamki już 2400 lat, zatem są prawie dwukrotnie starsze od ułamków dziesiętnych. Zostały one wymyślone właśnie dla poradzenia sobie z niewymiernością. Później jednak straciły pierwszoplanową pozycję w arytmetyce.

M.K.

Zadania

Uwaga: *W zadaniach symbol* $[x]$ *oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą liczby* x.

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 892. Wykazać, że jeśli p i q są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 893. Udowodnić, że jeśli $\tau(k)$ jest liczbą dzielników naturalnych liczby k, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n).$$

Rozwiązanie na str. 14

M 894. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$[\sqrt{n}\,] + [\sqrt[3]{n}\,] + \ldots + [\sqrt[n]{n}\,] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n].$$

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 507. Załóżmy, że na polaryzator pada wiązka światła spolaryzowanego liniowo. W przypadku, gdy oś polaryzatora jest równoległa do osi polaryzacji, zostaje przepuszczona część α^2 natężenia, natomiast gdy kąt między tymi osiami jest prosty – część ϵ^2. (Dla idealnego polaryzatora $\alpha^2 = 1$, $\epsilon^2 = 0$.) Jakie będzie natężenie przepuszczonego światła, jeżeli na parę polaryzatorów, których osie tworzą kąt θ, pada prostopadle światło niespolaryzowane o natężeniu I_0? (Odbicia pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 11

F 508. Między dwa polaryzatory o wzajemnie prostopadłych osiach wsunięto trzeci polaryzator o osi tworzącej kąt θ z osią pierwszego polaryzatora. Jakie jest natężenie światła przepuszczanego przez ten układ? (Zakładamy, że polaryzatory są idealne i straty pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 16