

# Zasada nieoznaczoności w pociągu

Grzegorz WROCHNA

Jednym z podstawowych, a jednocześnie „tajemniczych” wyników mechaniki kwantowej jest zasada nieoznaczoności. Według niej niemożliwe jest jednoczesne określenie położenia i prędkości danego obiektu z dowolną dokładnością. Ścisłej, iloczyn niepewności wyznaczenia położenia  $\Delta x$  i pędu  $\Delta p$  nie może być mniejszy niż połowa stałej Plancka  $\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Js, czyli

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2.$$

Wynik ten jest o tyle szokujący, że w mechanice klasycznej bez dokładnej znajomości położenia i pędu nie możemy nic powiedzieć o ewolucji układu. Dlatego często w popularnych przedstawieniach mechaniki kwantowej zasada nieoznaczoności ukazywana jest jako coś niezwyklego. W niniejszym artykule spróbujemy rozjaśnić nieco tę tajemniczość, odwołując się do prostej analogii.

Wyobraźmy sobie, że stoimy na peronie i chcemy zmierzyć prędkość przejeżdżającego pociągu. Do dyspozycji mamy zegarek i wiemy, że każdy wagon ma długość  $\lambda = 20$  m. Pomiaru prędkości możemy dokonać, odmierzając zegarkiem określony odcinek czasu  $t$  i licząc wagony, które w tym czasie nas minęły. Jeśli minęło nas  $n$  wagonów, to pokonana przez pociąg droga wynosi  $l = n\lambda$  z dokładnością do  $\Delta l = \lambda/2$ . W wyniku pomiaru otrzymamy prędkość

$$v = \frac{l}{t} = \frac{n\lambda}{t}$$

z dokładnością

$$\Delta v = \frac{\Delta l}{t} = \frac{\lambda}{2t} = \frac{v}{2n}.$$

Ze wzoru w sposób oczywisty wynika, że im większy interwał czasu, czy też im dłuższą drogę wybieramy, tym dokładniejszy będzie pomiar prędkości. Pamiętać jednak należy, że zawsze będzie to prędkość **średnia** na odcinku  $l = n\lambda$ . Innymi słowy, położenie pociągu  $x$  w chwili pomiaru znane jest z dokładnością  $\Delta x = l/2 = n\lambda/2$ . Mamy więc sytuację typową dla zasady nieoznaczoności: możemy niezbyt precyzyjnie zmierzyć prędkość na krótkim odcinku, ale w dość dobrze określonym miejscu, lub uzyskać dużą dokładność pomiaru prędkości średniej, rezygnując z precyzyjnego określenia miejsca. Ujmując rzecz matematycznie,

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{v\lambda}{4}$$

lub w języku pędu

$$(1) \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{p\lambda}{4}.$$

W mechanice kwantowej położenie cząstki można opisać za pomocą tzw. paczki falowej. Paczka falowa to fala, której amplituda jest istotnie różna od zera dla skończonej liczby okresów  $n$ , a więc w ograniczonym obszarze  $l = n\lambda$ . Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki koncentruje się w tym właśnie obszarze. Długość  $\lambda$  fali wyznaczona jest przez pęd  $p$  cząstki

$$(2) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}.$$

W naszej analogii każdy wagon pociągu odpowiada jednemu

## Podstawy matematyki w wieku XX 1. Wstęp

Wiktor MAREK,  
Jan MYCIELSKI

Autorzy dziękują za wnikliwe uwagi  
p. Mirosławowi Truszczyńskiemu.

Podstawy są dziedziną matematyki zajmującą się poprawnością rozumowań matematycznych, podstawowymi strukturami matematyki (takimi, które pozwalają zdefiniować wszelkie inne struktury) oraz efektywnością obliczeń matematycznych. Te trzy obszary skryształizowały się w XX wieku w postaci trzech dużych rozdziałów matematyki: *logiki matematycznej*, *teorii mnogości* i *teorii obliczalności*. Postaramy się opisać rozwój każdego z tych trzech rozdziałów podstaw. Oczywiście, opis nasz będzie, z konieczności, raczej pobieżnym szkicem.

W wieku dwudziestym podstawami matematyki zajmowali się bardzo znani matematycy i filozofowie, np. Cantor, Frege, Hilbert, Russell, Gödel, Tarski, Kleene, Martin, Skolem, Solovay, Shelah i Turing. Oczywiście, spotkamy poniżej wiele innych nazwisk – lista ta jest bardzo niekompletna. W Polsce, oprócz Tarskiego, badali podstawy: Chwistek, Ehrenfeucht, Grzegorzczak, Jaśkowski, Leśniewski, Lindenbaum, Łoś, Mostowski, Rasiowa, Sikorski, autorzy tego artykułu i wielu innych. Podręczniki logiki i podstaw (często książki bardzo obszerne) zawierają głównie wyniki badań matematyków dwudziestowiecznych. Obiektywne streszczenie dwudziestowiecznego rozwoju podstaw nie jest zatem zadaniem prostym, szczególnie że musimy to wszystko zmieścić na kilkunastu stronach maszynopisu. Ograniczymy się zatem do omówienia najistotniejszych rezultatów, m.in. twierdzeń Gödla o zupełności logiki pierwszego rzędu i o niezupełności bogatszych teorii matematycznych, niektórych twierdzeń o niezależności, informacji o roli aksjomatów istnienia bardzo dużych liczb kardynałowych itd.

Popatrzmy najpierw na stosunek podstaw matematyki do reszty matematyki. Nasuwa się nam następująca analogia. Dobry mechanik samochodowy nie musi znać termodynamiki (na której opiera się funkcjonowanie samochodów). Podobnie dobry matematyk, który nie ma pretensji

do głębszego wykształcenia poza swoją specjalnością, nie musi znać podstaw matematyki. Co więcej, popularyzacja termodynamiki wśród mechaników samochodowych nie jest zadaniem łatwym – i na podobne trudności napotyka popularyzacja podstaw matematyki wśród matematyków. Niektórych matematyków irytuje sam fakt, że ktoś o zainteresowaniach filozoficznych usiłuje opisać, choćby w części, funkcjonowanie ich umysłów i wyjaśniać w abstrakcyjny sposób, czym jest matematyka. Podkreślają oni, że matematyka, jaką znamy, uprawiana jest od tysięcy i osiągnęła wielkie sukcesy na polu opisywania rzeczywistości bez tego, by ktoś wyjaśnił jej naturę. Ale podstawy dają matematyczną teorię tego, czym jest matematyka, tak jak fizyka daje matematyczną teorię różnych innych zjawisk i procesów fizycznych. Jest naturalne, że – jak każdy opis rzeczywistości fizycznej – podstawy są niekompletne i stale są rozwijane i ulepszone.

Ponieważ podstawy traktują matematykę jako zjawisko fizyczne (proces konstrukcji pewnych tekstów), należy dodać, iż istnieją filozofowie i matematycy, którzy myślą, że ten punkt widzenia jest nierozsądny, że coś zaciemnia. Wierzą oni, iż matematyka jest nauką, która bada świat idei platońskich (które są transcendentne, czyli istnieją poza światem fizycznym, niezależnie od ludzkości).

Gödel, o którym będziemy pisać wiele w tym artykule, reprezentował tę opinię.

A zatem, że matematyka nie jest zjawiskiem czysto fizycznym, bo ma na nią bezpośredni wpływ świat pozafizycznych idei.

Jednakże matematyczne podstawy matematyki obywają się bez takich założeń i prowadzą do czysto fizycznego i nader kompletnego opisu zjawiska, jakim jest matematyka. Dlatego liczni filozofowie i matematycy (w tym autorzy tego artykułu) odrzucają platonizm, jako założenie sprzeczne z „brzytwą Ockhama” (tj. tym, że najprostsze teorie zgodne z faktami, czyli „nie mnożące bytów ponad potrzebę”, są najbardziej przekonujące).

Jak wspomnieliśmy wyżej, łatwo wykazać niekompletność współczesnych podstaw. Na przykład nie tłumaczą one, czym jest dobra matematyka. Wierzmy, że matematyka ma strukturę postaci: aksjomaty-definicje-twierdzenia-dowody,

okresowi takiej fali. Możemy więc podstawić (2) do (1) i otrzymamy

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar.$$

Pominęliśmy tu czynnik  $2\pi/4$ , gdyż niezbyt precyzyjna definicja  $\Delta x$  i  $\Delta p$  pozwala nam jedynie na dość grube oszacowanie.

Do podobnego rezultatu możemy dojść także w inny sposób, nie posługując się bezpośrednio formalizmem falowym. Zauważmy, że uzyskana „zasada nieoznaczoności” (1) jest konsekwencją „skwantowania” drogi, którą mierzyliśmy w dyskretnych jednostkach  $\lambda$ . Podobną rolę odgrywa w mechanice kwantowej wielkość fizyczna  $S$  zwana działaniem. Zazwyczaj działanie definiujemy jako całkę względem czasu z różnicy między energią kinetyczną i potencjalną. Dla ruchu jednostajnego prostoliniowego działanie można wyrazić iloczynem pędu  $p$  i drogi  $l$ ,

$$S = \frac{pl}{2}.$$

Według mechaniki kwantowej działanie można określić z dokładnością rzędu stałej Plancka  $\hbar$ ,

$$\Delta S \gtrsim \hbar.$$

Postać kwantowomechanicznej zasady nieoznaczoności możemy zatem odgadnąć przez analogię, zastępując we wzorze (1) kwant drogi  $\lambda$  kwantem działania  $\hbar$ . Przybierze on wówczas postać

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Przedstawiona analogia, choć nie jest formalnym wyprowadzeniem, dobrze ilustruje jedną z podstawowych idei mechaniki kwantowej: niemożność jednoczesnego określenia położenia i pędu z dowolną dokładnością jest wynikiem istnienia kwantu działania  $\hbar$ .



## Ułamki łańcuchowe okresowe

Marcin MAZUR

Ułamki łańcuchowe pojawiały się niejednokrotnie (ostatnio: w kwietniu 1999) na łamach *Delty*. Następujące ciekawe twierdzenie o nich udowodnił w roku 1770 francuski matematyk Lagrange.

**Twierdzenie 1.** Liczba niewymierna  $x$  ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

Zetknąłem się z tym twierdzeniem jako uczeń szkoły średniej. Niestety, żadne dostępne mi wówczas źródła nie podawały dowodu. Nabrałem przez to przekonania, że dowód ów musi być niezmiernie skomplikowany i nie wierzyłem, że mógłbym twierdzenie Lagrange’a udowodnić sam, a – jak wiadomo – „bez wiary nie da się niczego udowodnić”.

Okazuje się jednak, że dowód wymaga wyłącznie pewnej spostrzegawczości i władania indukcją matematyczną; jest w zasięgu zdolnego ucznia szkoły średniej, o czym postaram się przekonać Czytelnika poniżej.

Zacznijmy od przypomnienia niezbędnych pojęć. Dla dowolnej liczby niewymiernej  $\alpha$  określimy ciąg liczb rzeczywistych  $(a_k)$  i ciąg liczb całkowitych  $n_k$ , jak następuje:

$$(*) \quad a_0 = \alpha, \quad a_{k+1} = \frac{1}{\{a_k\}}, \quad n_k = [a_k].$$

Przez  $[x]$  i  $\{x\}$  oznaczamy odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby  $x$ . Ograniczamy się tu do liczb niewymiernych – dla wymiernych  $\alpha$  otrzymalibyśmy  $a_k \in \mathbb{Z}$ , dla pewnego  $k$ , i wówczas definicja liczby  $a_{k+1}$  nie miałaby sensu. Zauważmy, że  $a_k > 1$  i  $n_k \geq 1$  dla każdego  $k > 0$ . Odnotujmy ponadto równości  $a_k = n_k + 1/a_{k+1}$ . Przez indukcję dowodzimy, że dla każdej liczby całkowitej  $k \geq 0$  jest

$$\alpha = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_k + \frac{1}{a_{k+1}}}}}$$

Wynika stąd, że ciąg liczb wymiernych

$$n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_k}}}$$

jest zbieżny do liczby  $\alpha$ . Piszemy  $\alpha = [n_0; n_1; n_2; \dots]$ , a ciąg  $(n_i)$  nazywamy *rozwinięciem liczby  $\alpha$  na ułamek łańcuchowy*. Okazuje się, że każda liczba niewymierna ma jednoznaczny zapis postaci  $[n_0; n_1; n_2; \dots]$  dla pewnych całkowitych  $n_0, n_1 > 0, n_2 > 0, \dots$  danych wzorami  $(*)$  i odwrotnie, każdy taki ciąg odpowiada pewnej liczbie niewymiernej. Ułamki łańcuchowe stanowią więc swoisty sposób zapisywania liczb rzeczywistych, podobnie jak znacznie bardziej rozpowszechniony zapis dziesiętny. Następująca prosta obserwacja będzie dla naszych rozważań bardzo użyteczna: jeśli  $\beta = [n_{k+1}; n_{k+2}; \dots]$ , to wówczas

$$(**) \quad \alpha = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_k + \frac{1}{\beta}}}}$$

Powiemy, że liczba niewymierna  $x$  ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jeśli

$$x = [l_0; l_1; \dots; l_i; m_1; m_2; \dots; m_k; m_1; m_2; \dots; m_k; m_1; \dots].$$

Piszemy wówczas  $x = [l_0; l_1; \dots; l_i; \overline{m_1; m_2; \dots; m_k}]$ . Zauważmy, że jeśli  $\alpha = [m_0; \overline{m_1; m_2; \dots; m_k}]$ , to wobec  $(**)$  otrzymujemy równość

$$\alpha = m_0 + \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \dots + \frac{1}{m_k + \frac{1}{\alpha}}}}$$

ale nie wiemy, dlaczego niektóre prace matematyków wprawiają nas w zachwyt, a inne wydają się pozbawione pomysłów lub wręcz nudne. Podstawy nie tłumaczą też, jak matematycy budują dowody swych przypuszczeń. Ponieważ nie mamy dobrego modelu procesu budowy dowodów, jest więc jeszcze daleko do prawdziwie efektywnego automatycznego dowodzenia twierdzeń (choć i w tej dziedzinie osiągnięto spektakularne sukcesy).

Jak żąda tego nasza definicja, na wykładach podstaw matematyki studenci poznają zazwyczaj logikę matematyczną, teorię mnogości oraz wprowadzenie do teorii obliczalności (rekursji). Wszystkie te części podstaw są ze sobą powiązane i w historii, którą poniżej przedstawimy, będą przenikać się wzajemnie. Ale zapytajmy najpierw, jaki był ich stan w roku 1900.

Logika miała zawsze co najmniej dwa aspekty – matematyczny i filozoficzny. Aspekt filozoficzny pochodzi od starożytnych Greków. Filozofia wymagała pewnej precyzji rozumowania. W tym celu filozofowie greccy, przede wszystkim Arystoteles, chcieli zrozumieć, czym są poprawne dowody. Sformułowali więc sylogistykę, kodyfikującą niektóre poprawne rozumowania. Z punktu widzenia dzisiejszej logiki były to reguły dotyczące relacji jednoargumentowych, czyli unarnych. Tak więc, jeśli Sokrates jest Grekiem, a wszyscy Grecy są śmiertelni, to i Sokrates jest śmiertelny. Dziś zapisalibyśmy ten sylogizm jako

$$[\text{grek}(S) \wedge \forall x(\text{grek}(x) \Rightarrow \text{śmiertelny}(x))] \Rightarrow \text{śmiertelny}(S).$$

$\text{grek}(\cdot)$  i  $\text{śmiertelny}(\cdot)$  są w tej formule symbolami do opisu relacji unarnych. Użyliśmy tu kwantyfikatora ogólnego  $\forall x$  (dla każdego  $x$ ). Podobnie wprowadza się kwantyfikator egzystencjalny  $\exists x$  (istnieje  $x$ ).

Grecy nie formalizowali sylogizmów za pomocą formuł. Niemniej jednak analizowali sylogizmy i przez ponad dwa tysiące lat teoria sylogizmów stanowiła centrum logiki. Matematycy starożytni rozumowali podobnie jak my, intuicyjnie rozumieli, co jest poprawnym dowodem matematycznym, a co nim nie jest. Dowody, które wymyślili, są po dziś dzień wykładane w szkołach i spełniają dzisiejsze standardy ścisłości. W wieku XVII Leibniz miał nadzieję stworzenia *lingua universalis*, języka, który pozwalałby wyrazić zdania matematyki, i *calculus ratiocinator*, który by sprowadzał rozumowania do rachunków.

W połowie XIX wieku Boole wprowadził, przez analogię z algebrą liczb, algebrę zdań. Dalszy rozwój logiki zawdzięczamy De Morganowi, Peirce'owi, Fregemu i innym matematykom i filozofom. Było rzeczą jasną, że logika, jaką posługuje się matematyka, wykracza poza sylogistykę, już choćby dlatego, że zajmuje się nie tylko relacjami unarnymi, lecz także takimi, które wiążą więcej niż jeden obiekt. Na przykład, podstawowa w matematyce relacja mniejszości wśród liczb nie jest unarna, lecz binarna, bo wiąże pary elementów.

Rozwój analizy matematycznej w wieku XVIII i brak dostatecznie jasnych definicji ciągłości, granicy funkcji i innych podstawowych pojęć analizy spowodował, że trzeba było spreeczować takie pojęcia, jak liczba rzeczywista, ciąg, funkcja, etc. Pytanie, czym są liczby rzeczywiste, przewijało się w pracach wielu matematyków i filozofów dziewiętnastowiecznych. Trzeba było zdefiniować (by użyć terminologii informatycznej), jakie są podstawowe „struktury danych” matematyki. Epokowa książka Dedekinda z r. 1883, *Was sind und was sollen die Zahlen* zawierała następujące stwierdzenie: „W nauce, co dowód posiada, nie powinno być bez dowodu przyjęte”. Dedekind *udowodnił* podstawowe własności liczb rzeczywistych, własności, które poprzednio przyjmowano jako oczywiste. Stąd też pod koniec wieku XIX nadszedł czas budowy podstaw matematyki.

Spośród wielu matematyków, którzy przyczynili się do rozpoznania podstawowych matematycznych struktur, najważniejszym był G. Cantor, który udowodnił, że wszystkie przedmioty, jakie rozważają matematycy, można rozumieć jako zbiory. Co więcej, okazało się, że taka interpretacja usuwa wszystkie niejasności, które dawniej pojawiały się w matematyce. Na przykład, za pomocą pojęcia zbioru łatwo zdefiniować pojęcie liczby naturalnej, stąd zaś liczby całkowitej i wymiernej. Jak pokazał Dedekind (i niezależnie Cantor), przy użyciu pojęcia zbioru (nieco trudniej) definiuje się też liczby rzeczywiste.

Pojęcie zbioru par pozwala zdefiniować z kolei pojęcie funkcji. Podejście takie zrywało z poprzednio używanym pojęciem funkcji jako przepisu, algorytmu, który z elementami dziedziny pozwalał łączyć wartości. W latach 80. i 90. XIX wieku Cantor udowodnił wiele twierdzeń teorii

dla pewnych liczb całkowitych  $A, B, C, D$ . Zatem  $\alpha$  jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego  $Cz^2 + (D - A)z - B$  o współczynnikach całkowitych. Ponownie używając  $(\star\star)$ , otrzymujemy

$$x = l_0 + \frac{1}{l_1 + \frac{1}{l_2 + \dots + \frac{1}{l_i + \frac{1}{\alpha}}}}$$

dla pewnych liczb całkowitych  $K, L, M, N$ . Zatem  $x$  jest również pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Tym samym udowodniliśmy, że liczba niewymierna, która ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, jest pierwiastkiem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Fakt ten został odnotowany już przez Eulera. Nieco trudniejszy dowód twierdzenia odwrotnego podał po raz pierwszy Lagrange.

Załóżmy teraz, że liczba niewymierna  $\alpha$  jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  o współczynnikach całkowitych.

Dobrze znane wzory na pierwiastki równania kwadratowego dają

$$\alpha = \frac{\sqrt{d} + u}{w}, \text{ gdzie } d = b^2 - 4ac, u = \pm b \text{ i odpowiednio } w = \mp 2a.$$

Wykażemy, że odpowiadające liczbie  $\alpha$  ciągi  $a_k$  i  $n_k$ , określone wzorem  $(\star)$ , są okresowe.

Oczywiście  $w|(d - u^2)$ . Ta prościutka obserwacja jest kluczowa dla całego dowodu. Istotnie, zauważmy, że

$$a_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{d} + u}{w} - n_0} = \frac{\sqrt{d} + wn_0 - u}{d - (wn_0 - u)^2} = \frac{\sqrt{d} + u_1}{w_1},$$

gdzie  $u_1 = wn_0 - u$  i  $w_1 = \frac{d - u_1^2}{w}$ . Skoro zaś  $w|(d - u^2)$ , to

liczby  $u_1, w_1$  są całkowite oraz  $w_1|(d - u_1^2)$ . Stosując powyższe rozumowanie do liczby  $a_1$ , otrzymamy, że  $a_2 = \frac{\sqrt{d} + u_2}{w_2}$ , gdzie

$$u_2 = w_1 n_1 - u_1, w_2 = \frac{d - u_2^2}{w_1} \text{ są liczbami całkowitymi i } w_2|(d - u_2^2).$$

Oczywista indukcja dowodzi, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k \geq 0$

mamy  $a_k = \frac{\sqrt{d} + u_k}{w_k}$ , gdzie liczby całkowite  $u_k, w_k$  określone są rekurencyjnie następująco:

$$u_0 = u, w_0 = w, u_{k+1} = n_k w_k - u_k, w_k w_{k+1} = d - u_{k+1}^2.$$

$$\text{Odnajdujemy równości } a_k = \frac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} = \frac{w_{k-1}}{\sqrt{d} - u_k}.$$

By osiągnąć cel i wykazać, iż ciąg  $a_k$  jest okresowy, wystarczy sprawdzić, że dla pewnych  $s < t$  mamy  $a_s = a_t$  (dlaczego?), co jest równoważne równościom  $u_s = u_t$  i  $w_s = w_t$ . Ostatnie równości otrzymamy, jeśli uda nam się uzasadnić, że ciągi  $u_k$  i  $w_k$  są ograniczone. Istotnie, ponieważ ciągi te mają wyrazy całkowite, więc ciąg par  $(u_k, w_k)$  ma wówczas tylko skończenie wiele różnych wartości i dla pewnych  $s < t$  mamy  $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$ .

Przystąpmy więc do dowodu ograniczoności ciągów  $u_k$  i  $w_k$ . Wynika on z następujących trzech obserwacji:

1. Jeśli  $u_k < -\sqrt{d}$  dla pewnego  $k > 0$ , to  $\sqrt{d} + u_k < 0$ , a ponieważ  $a_k = \frac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$ , więc  $w_k < 0$ . Jako że  $a_{k+1} = \frac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$ , musi być  $\sqrt{d} - u_{k+1} < 0$ , tzn.  $u_{k+1} > \sqrt{d} > 0$ . Ponadto  $u_{k+1} = n_k w_k - u_k < -u_k$ , więc  $|u_{k+1}| < |u_k|$ .
2. Jeśli  $u_k > \sqrt{d}$  dla pewnego  $k > 0$ , to  $\sqrt{d} + u_k > 0$ , a ponieważ  $a_k = \frac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$ , więc  $w_k > 0$ . Jako że  $a_{k+1} = \frac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$ , musi być  $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$ , tzn.  $u_{k+1} < \sqrt{d} < u_k$ . Ponadto  $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k$ , więc  $|u_{k+1}| < |u_k|$ .
3. Jeśli  $|u_k| < \sqrt{d}$  dla pewnego  $k > 0$ , to  $\sqrt{d} + u_k > 0$ , a ponieważ  $a_k = \frac{\sqrt{d} + u_k}{w_k} > 1$ , więc  $w_k > 0$ . Jako że  $a_{k+1} = \frac{w_k}{\sqrt{d} - u_{k+1}} > 1$ , musi być  $\sqrt{d} - u_{k+1} > 0$ , tzn.  $u_{k+1} < \sqrt{d}$ . Ponadto  $u_{k+1} = n_k w_k - u_k > -u_k > -\sqrt{d}$ , więc  $|u_{k+1}| < \sqrt{d}$ .

Zauważmy teraz, że jeśli spełnione są nierówności  $|u_i| > \sqrt{d}$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$ , to wówczas wobec własności 1 i 2 mamy  $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_s| > \sqrt{d}$ . Liczby  $u_i$  są całkowite, a zatem otrzymujemy stąd nierówności  $\sqrt{d} < |u_s| \leq |u_1| - s + 1$ . W szczególności, musi być  $s < |u_1| - \sqrt{d} + 1$ . Innymi słowy,  $|u_{k_0}| < \sqrt{d}$  dla pewnego  $k_0 \leq |u_1| - \sqrt{d} + 1$ . Z własności 3 wynika więc, że  $|u_k| < \sqrt{d}$  dla każdego  $k \geq k_0$ . Tym samym ciąg  $u_k$  jest ograniczony. Ponadto, nierówność  $a_k = (\sqrt{d} + u_k)/w_k > 1$  pociąga za sobą nierówności  $0 < w_k < 2\sqrt{d}$  dla  $k \geq k_0$ . Wykazaliśmy więc, że ciągi  $u_k$  i  $w_k$  są ograniczone i co za tym idzie, liczba  $\alpha$  ma okresowe rozwinięcie na ułamek łańcuchowy. Dowód **Twierdzenia 1** jest zakończony.

Nasze rozważania pozwalają uzyskać nieco dokładniejszą informację. Niech  $k_1$  będzie najmniejszą taką liczbą, że  $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$ . Oczywiście  $k_1 \leq k_0$ . Łatwo zauważyć, że ciąg par  $(u_k, w_k)$ , gdzie  $k > k_1$ , przyjmuje co najwyżej  $\sqrt{d} \cdot 2\sqrt{d} = 2d$  różnych wartości.

Zatem istnieją takie  $s < t$ , że  $(u_s, w_s) = (u_t, w_t)$  i  $t - s < 2d$ . Innymi słowy, okres podstawowy ułamka łańcuchowego, równego liczbie  $\alpha$ , jest mniejszy niż  $2d$ . Czytelnik zdoła teraz bez trudu przekonać się, że zachodzi następujące

**Twierdzenie 2.** Liczba niewymierna  $(\sqrt{d} + u)/w$ , gdzie  $u, w$  są liczbami całkowitymi i  $w \mid (d - u^2)$ , ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy postaci  $[n_0; \overline{n_1; \dots; n_i; \overline{n_{i+1}; \dots; n_{i+j}}]$ . Możemy przy tym przyjąć za  $i$  taką najmniejszą liczbę  $k \geq 0$ , że  $(\sqrt{d} - u_k)/w_k > 0$  i wówczas  $i \leq \max(1, |u_1| - \sqrt{d} + 1)$ . Ponadto  $j < 2d$ .

W szczególności, dla  $u = 0$  i  $w = 1$  otrzymujemy następujący wynik.

**Twierdzenie 3.** Dla pewnego  $j < 2d$  mamy  $\sqrt{d} = [n_0; \overline{n_1; \dots; n_j}]$ . Ponadto  $n_j = 2n_0$ .

Ostatnia część twierdzenia wymaga dodatkowych wyjaśnień. Ponieważ  $w_0 = 1$ , mamy  $w_{j+1} = w_1 = w_0 w_1 = d - u_1^2$ . Jako że  $w_j w_{j+1} = d - u_{j+1}^2 = d - u_1^2 = w_{j+1}$ , więc  $w_j = 1$  i  $a_j = \sqrt{d} + u_j$ . Zatem  $0 < \sqrt{d} - u_j < 1$ , tzn.  $u_j = [\sqrt{d}] = n_0$ . Tym samym  $n_j = [a_j] = 2n_0$ .

Jako przyjemne zadanie pozostawiamy Czytelnikowi uzasadnienie, że dla  $1 \leq s < j$  zachodzą równości  $n_s = n_{j-s}$ . **Twierdzenie 3** można też wykorzystać do opisu rozwiązań równania Pella  $x^2 - dy^2 = 1$  w liczbach całkowitych, ale to już zupełnie inna historia.

mnożości (zbiorów). Cantor zanalizował też pojęcia takie, jak porządek liniowy, wprowadził pojęcie dobrego porządku (a w konsekwencji i liczby porządkowej). Stąd już był tylko krok do dowodów używających indukcji pozaskończoności. Było to całkowicie nowe i silne narzędzie w rękach matematyków. Wyszło ono istotnie poza indukcję względem liczb naturalnych oraz repertuar dowodowy odziedziczony po Grekach.

Teoria obliczalności w końcu XIX wieku jeszcze nie istniała. Istniały tylko liczne przykłady algorytmów. Na przykład algorytm Euklidesa dla znajdowania największego wspólnego dzielnika lub algorytm Cardano rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Sprawy efektywności zajmowały matematyków i filozofów greckich, a także matematyków późniejszych. Newton i inni wielcy analitycy aż do połowy XIX wieku nie akceptowali prawdziwości zdań egzystencjalnych nie popartych algorytmem konstrukcji odpowiedniego przykładu. Jeśli więc twierdzili oni, na przykład, że równanie różniczkowe  $y' = -y$  z warunkiem początkowym  $y(1,3) = 17$  ma rozwiązanie, to trzeba było wiedzieć, jak owo rozwiązanie skonstruować, innymi słowy, podać przepis na obliczanie wartości takiej funkcji  $y(\cdot)$ .

Urządzenia ułatwiające liczenie znane są od starożytności. Liczydła różnych systemów potrzebne były do obliczeń. Wielu wynalazców, inżynierów i matematyków budowało maszyny, które ułatwiały obliczenia. Artyleria i finanse wymagały szczególnie wielu obliczeń (i często dość dokładnych). Stąd też ze sztabów wojskowych, urzędów podatkowych i banków pochodziło zapotrzebowanie na urządzenia liczące. Zostały wynalezione maszyny do dodawania i mnożenia, potrzebne w spisach ludności, i inne maszyny mechaniczne ułatwiające obliczenia. Ale pytania o istotę pojęcia obliczenia były rzadkie. W pierwszej połowie XIX wieku Babbage zaprojektował nawet rodzaj mechanicznego komputera używającego programów, ale pytanie, czym jest funkcja obliczalna, nie zostało jeszcze postawione.

Spróbujemy dalej przedstawić rozwój trzech głównych nurtów podstaw matematyki: teorii mnogości, logiki i teorii modeli, oraz teorii funkcji obliczalnych w wieku XX.