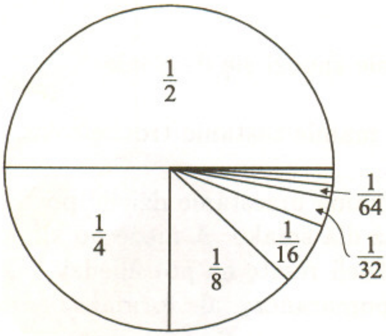
Podział świątecznej pomarańczy

Nasi chłopcy, Paweł (7 lat) i Tomek (9 lat), dobrze wiedzą, że jeśli dostaną ode mnie pół jabłka $\left(\frac{1}{2}\right)$, potem pół połówki $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$, potem pół pozostałej ćwiartki $\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)$, to dostaną, gdy będę im tak bez końca dodawał po kawałku, całe jabłko. Wytłumaczyłem im zapis: w naszym podziale $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ jest rozmiarem kawałka jabłka, który chłopcy dostali w n-tym podziale, równy kawałkowi, którego im jeszcze nie oddałem. Wzór

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots = 1$$



Rys. 1. Dzieci dostały całe jabłko.

miał dla Pawła i Tomka jasne znaczenie – całe jabłko otrzymane w kawałkach!!! Nie mieli też chłopcy problemu ze zrozumieniem zapisu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n},$$

bo oddawał on dokładnie sytuację po n-tym krojeniu, gdy został mi jeszcze kawałek $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, a im tego kawałka brakowało do całego jabłka.

Ale jak wytłumaczyć dzieciom wzór na sumę

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots$$

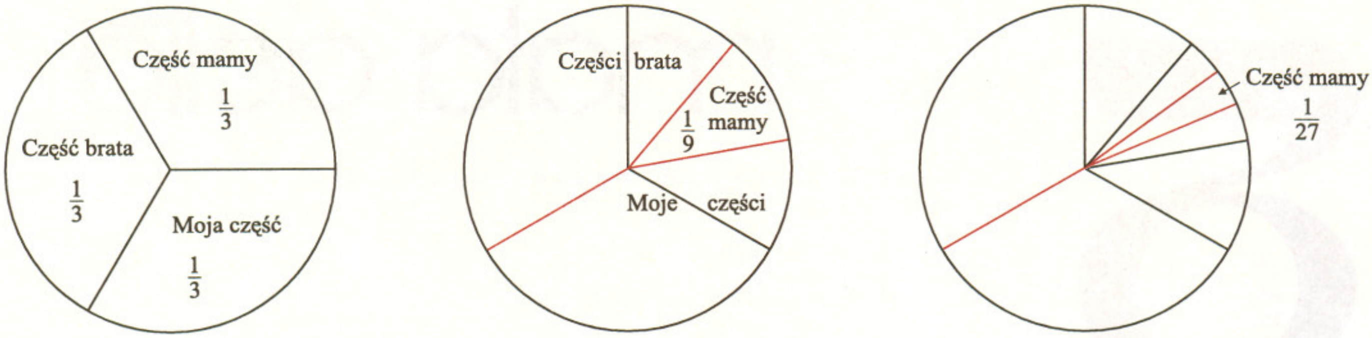
czy

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\ldots?$$

My, matematycy, znamy dziesiątki metod obliczenia powyższych sum. Wiemy, że opisują one ciąg geometryczny; ale jak przedstawić rozwiązanie dostępne dla dzieci?

*****

Dawno, dawno temu, gdy miałem siedem lat, mama zdobyła na Wigilię pomarańczę. W tamtych czasach była to prawdziwa zdobycz; specjał wigilijny. Doczekaliśmy się, przy końcu wieczerzy wigilijnej, podziału pomarańczy. Mama rozdzieliła ją na trzy równe części, po jednej dała mnie i bratu, a jedną zostawiła sobie. Szybko połknęliśmy nasze kawałki i poprosiliśmy mamę o więcej. Mama podzieliła swoją część na trzy równe kawałki, jeden zostawiła sobie, a nam dała resztę. Po chwili z naszych kawałków nic nie zostało i jeszcze raz poprosiliśmy o więcej. I znowu mama podzieliła swój mały kawałek pomiędzy nas i siebie. Nie minęło wiele czasu i mama nie miała już nic. Ja i mój brat zjedliśmy po pół pomarańczy. Bardzo nam smakowała.



Rys. 2

Z tej historii, dzieci, płyną dwa morały:
1. Mama zrobi wszystko dla swoich dzieci.
2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots=\frac{1}{2}$.

⋆⋆⋆⋆⋆

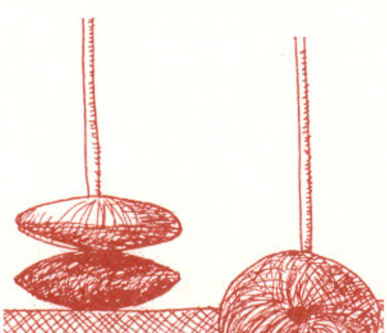
– A co będzie – zapytał Tomek – jeśli mamie znudzi się dzielenie i przerwie po stu podziałach?
– Nic nie będzie – dopowiedział Pawełek – mamie zostanie trochę soku, a może tylko atom.
– Masz rację – odpowiedziałem – ale jeśli mama przestanie dzielić po trzech cięciach, to będzie coś miała, chociaż dla smaku. A może po kilku podziałach na trzy równe części mama podzieli resztę na pół między dzieci. Każde z dzieci dostanie znowu pół pomarańczy, ale formuła będzie miała postać:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

W formule n oznacza liczbę podziałów na 3 równe części, a $\frac{1}{3^n}$ jest wielkością ostatniego kawałka pozostałego mamie i rozdzielonego przez nią na pół między chłopców. Możemy też naszą formułę zapisać w postaci:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n}\right).$$

– A co by było – zapytał Tomek – gdyby i mama, i tata przynieśli po pomarańczy, a dzieci było troje?
– Każdy dostałby po $\frac{2}{5}$ pomarańczy – szybko powiedział Pawełek, który właśnie nauczył się ułamków – ale myślę – dorzucił – że rodzice podzieliliby dalej swoje części.
– Jeśli rodzice podzieliliby swoje części na pięć równych kawałków, każde z dzieci dostałoby dodatkowo $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$ pomarańczy i rodzicom zostałoby także po kawałku wielkości $\left(\frac{2}{5}\right)^2$. Jeśli tak rodzice bedą dzielić bez końca, to dzieci dostaną obie pomarańcze, czyli każde z nich $\frac{2}{3}$ pomarańczy – podsumował Tomek.
Zgodziłem się i zapisałem formalnie, przeprowadzone przez dzieci, rozumowanie:



$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots=\frac{2}{3}.$$

A co będzie, jeśli po n cięciach rodzicom znudzi się podział i oddadzą resztę dzieciom? Pamiętajcie, że każde z rodziców ma kawałek z n-tego podziału, wielkości $\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

– Jasne! Dzieci jest troje, więc każde dostanie od rodzica dodatkowo $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, czyli od obojga rodziców $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ – zauważył Tomek.

– Możemy to zapisać formułą – podsumowałem:

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{2}{3}.$$

Czy możemy przeprowadzić podobne rozumowanie, na przykład, z $\frac{11}{41}+\left(\frac{11}{41}\right)^2+\ldots$?

– Chyba tak – powiedział po zastanowieniu Tomek i zaczął swoje opowiadanie.

– Na poczęstunek do naszej klasy, która ma 30 dzieci, przyszło 11 rodziców, każdy z pizzą. Podzielili pizzę między dzieci i siebie. Każdy dostał $\frac{11}{30+11}=\frac{11}{41}$ pizzy. Dzieci zjadły swoje porcje i rodzice dzielili dalej. W końcu każde dziecko zjadło $\frac{11}{30}$ pizzy, a rodzicom nie zostało nic – zaśmiał się Tomek.

– Algebraicznie otrzymamy – podsumowałem:

$$\frac{11}{41}+\left(\frac{11}{41}\right)^2+\left(\frac{11}{41}\right)^3+\left(\frac{11}{41}\right)^4+\left(\frac{11}{41}\right)^5+\ldots=\frac{11}{30}.$$

– To ja umiem rozwiązać „nieskończoną sumę" dla każdej liczby dzieci i rodziców – wykrzyknął Tomek.

Pomogłem Tomkowi zapisać formułę dla d dzieci i r rodziców:

$$\frac{r}{d+r}+\left(\frac{r}{d+r}\right)^2+\left(\frac{r}{d+r}\right)^3+\left(\frac{r}{d+r}\right)^4+\left(\frac{r}{d+r}\right)^5+\ldots=\frac{r}{d}.$$

– A co będzie, gdy rodzicom znudzi się dzielenie i po prostu każą dzieciom wziąć resztę pizzy? – zapytali chłopcy. Z pewnym trudem zapisaliśmy:

$$\frac{r}{d+r}+\left(\frac{r}{d+r}\right)^2+\left(\frac{r}{d+r}\right)^3+\left(\frac{r}{d+r}\right)^4+\left(\frac{r}{d+r}\right)^5+\ldots+\left(\frac{r}{d+r}\right)^n+\frac{r}{d}\left(\frac{r}{d+r}\right)^n=\frac{r}{d}.$$

– Ale to śmieszne – zachichotał Pawełek – jeśli rodzice mają jedno dziecko, to zje ono dwie pomarańcze.

– Tak – powiedzieliśmy jednocześnie z Tomkiem. Otrzymamy formułę:

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots=2.$$

***

Zjedliśmy ze smakiem przygotowaną przez mamę pizzę, a potem jabłka i pomarańcze.

Małą Deltę z pomocą Pawełka i Tomka przygotował Józef PRZYTYCKI

Rozwiązanie zadania F 507.

Załóżmy, że na układ pada światło o wektorze pola elektrycznego $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Jeżeli oś pierwszego polaryzatora jest zorientowana wzdłuż osi x, to przepuszczone światło będzie opisane wektorem $(\alpha\cos\varphi, \epsilon\sin\varphi)$. Obróćmy teraz ten wektor o kąt θ, aby przejść do układu współrzędnych związanego z drugim polaryzatorem. Otrzymamy:

$$(\alpha\cos\varphi\cos\theta-\epsilon\sin\varphi\sin\theta, \alpha\cos\varphi\sin\theta+\epsilon\sin\varphi\cos\theta)\,.$$

Wektor polaryzacji po przejściu przez drugi polaryzator ma następującą postać w nowym układzie współrzędnych:

$$(\alpha^2\cos\varphi\cos\theta-\alpha\epsilon\sin\varphi\sin\theta, \epsilon\alpha\cos\varphi\sin\theta+\epsilon^2\sin\varphi\cos\theta)\,.$$

Natężenie światła jest dane przez sumę kwadratów składowych tego wektora:

$$I_t(\varphi)/I_0=\alpha^2(\alpha\cos\varphi\cos\theta-\epsilon\sin\varphi\sin\theta)^2+\epsilon^2(\alpha\cos\varphi\sin\theta+\epsilon\sin\varphi\cos\theta)^2\,.$$

Dla światła niespolaryzowanego musimy uśrednić natężenie względem kąta φ, co daje:

$$I_t/I_0=\frac{1}{2}(\alpha^4+\epsilon^4)\cos^2\theta+\alpha^2\epsilon^2\sin^2\theta\,.$$