Wiek topologii

Jerzy MIODUSZEWSKI

Aby zainteresować matematyką moją sześcioletnią córkę, skleiłem pasek papieru we wstęgę Möbiusa. Powiedziała: Tato, tyś się pomylił! Powiedzieliby zapewne tak i starożytni Grecy. W pierwszym rozumowaniu „Elementów” Euklides nie zauważa, że korzysta z faktu rozcinania płaszczyzny przez okrąg. Dopiero w matematyce arabskiej dostrzec można świadome korzystanie z aksjomatu Pascha. Matematyka nie akceptuje bez potrzeby rzeczy zbyt osobliwych i nie zauważa rzeczy zbyt oczywistych.

Wstęga Möbiusa i aksjomat Pascha leżą u początków topologii, dyscypliny matematycznej zdającej sprawę z najogólniejszych zasad geometrii, której potrzebę przeczuwał Leibniz, inspirował Gauss, a której powstanie przypada na drugą połowę XIX wieku.

Jej siostrzycą jest topologia ogólna – nazywana też mnogościową – której motywacje sięgają Arystotelesa i Scholastyków XIV wieku – ale która w matematyce pojawiła się w końcu wieku dziewiętnastego jako zbiór środków dowodowych analizy i geometrii, a z początkiem naszego wieku wyodrębniła się jako dyscyplina samodzielna. Bada obiekty mnogościowe, więc mogłaby być uważana za gałąź teorii mnogości, ale sposób traktowania zadań jest taki, jak w powstałej wcześniej topologii geometrycznej.

Szersze zakresy obu topologii nie tworzą jednak całości. Synkretyczne ich łączenie doprowadziło do mylącego obrazu. Ich źródła są różne, a kierunki rozwoju – w pewnym okresie wspomagające się – odmienne. Łączy je wszakże jeszcze jeden ogólny aspekt. Jedna i druga zaspokajały ważną potrzebę matematyki XIX wieku, która dla swojej imponującej budowli poszukiwała zwieńczenia w postaci metafizycznych uzasadnień.

Metafizyka jest budową myślową dającą ramy dla pojęć najogólniejszych. Problemem metafizycznym jest zastanawianie się nad sensownością myśli o podzielności przestrzeni w nieskończoność. Metafizyka przedyskutuje problem nieskończoności. Określi zadania geometrii. Sformułuje V postulat, ale nie będzie zajmować się zadaniem o sumie kątów w trójkącie. Czerpie z doświadczenia. Ale jest to doświadczenie podstawowe – wspólne dla wszystkiego. Razem składa się na to, co Kant nazwał wiedzą *a priori*. Dyscypliny naukowe mają wbudowane w siebie właściwe sobie zasady metafizyczne. Są okresy w rozwoju nauk, kiedy tworzenie tych zasad daje się obserwować. Matematyka przeszła fazę niepokoju metafizycznego w głębokiej starożytności greckiej, kiedy odkryto niewspółmierności, a aporie Zenona wskazywały konieczność ograniczeń co do poglądu na budowę punktową przestrzeni i w rozumieniu nieskończoności. Innymi takimi okresami były: okres nowożytny, kiedy dzięki rachunkowi różniczkowemu i całkowemu włączono do matematyki ruch, oraz okres po odkryciach Dedekinda i Cantora, kiedy trzeba było adaptować dla matematyki teorię mnogości. Po zbudowaniu metafizycznych ram dla teorii następuje okres korzystania z siły jej zasad. Okres rozwoju się kończy, kiedy dochodzi do rozwiązania problemów wynikających z przyjętych zasad i teoria ginie w pustce metafizycznej. Jest niewiele dyscyplin matematycznych – wśród nich na pewno teoria liczb – których niepokój metafizyczny nie opuszcza. Większość – na przekór twierdzeniu Gödla – rozwiązuje swoje problemy.

Geometryczny nurt topologii rozwijał się – począwszy od Gaussa – pod wpływem potrzeb analizy. Teoria funkcji analitycznych postawiła zadanie wyeliminowania z rozważań funkcji wielowartościowych poprzez zinterpretowanie ich jako funkcji jednowartościowych na powierzchniach nakrywających ich dziedziny. Redukcje tego zagadnienia – nazywanego zagadnieniem uniformizacji – wiodły do twierdzenia nazywanego twierdzeniem o zachowaniu obszaru, które miało orzekać, że podzbiór otwarty przestrzeni euklidesowej, przeniesiony za pomocą homeomorfizmu punktowego w inne jej miejsce, nadal będzie zbiorem otwartym. Twierdzenia dowiódł Brouwer, nie bacząc, że problem uniformizacji został rozstrzygnięty wcześniej przez Koebego na innej drodze. Jeden z wniosków tego twierdzenia orzekał, że przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami nie można odwzorować na siebie homeomorfizmem punktowym. Uprawomocniło to stosowalność metod mnogościowych w geometrii. Prace Brouwera zawierały poza tym rozwinięcie procedury aproksymacyjnej łączącej metody istniejącej już wcześniej topologii symplicjalnej z metodami mnogościowymi. Dzięki nim i programowej rozprawie Dehna i Heegarda,

Rozwiązanie zadania F 506.
W czasie wypływu z naczynia powietrze rozszerza się i wobec tego ochładza. Następnie pozostałe w naczyniu powietrze ogrzewa się kosztem ciepła przewodzenia i ciśnienie jego zwiększa się.

dotyczącej topologii wielościanów, topologia o ukierunkowaniu geometrycznym określiła się jako dyscyplina niezależna od problemów zewnętrznych.

Jej podkładem stricte geometrycznym była topologia wielościanów – rozumianych jako bryły kompleksów symplicjalnych – z ich odwzorowaniami kawałkami liniowymi. Tu problemem stała się wkrótce hipoteza podstawowa – Hauptvermutung – według której dwie rozmaitości wielościenne, dające się odwzorować na siebie homeomorfizmem punktowym, miały dać się na siebie odwzorować homeomorfizmem kawałkami liniowym. Wcześniejszym problemem było to, czy rozmaitości – rozumiane jako sumy mnogościowe obszarów euklidesowych tego samego wymiaru – mogą być traktowane jako wielościany, tj. czy są triangulowalne. Hauptvermutung zapewniałaby, że triangulacja jest w określonym sensie jedyna. Zapewniałaby, że charakterystyka Eulera sumująca ze znakami na przemian ilości sympleksów triangulacji – kolejno według ich wymiarów – nie zmienia się, jeśli bryłę triangulacji poddać przekształceniu będącemu homeomorfizmem punktowym. Problem triangulacji został rozwiązany w wymiarze 2 w latach dwudziestych przez Radó, a w wymiarze 3 w latach czterdziestych przez Moise'a, który potwierdził Hauptvermutung do wymiaru 3. Mimo że w wymiarach wyższych Hauptvermutung jest nierozstrzygnięta bądź fałszywa, to charakterystyka Eulera okazała się niezmienna przy homeomorfizmach punktowych; dzięki wykorzystanej – poprzez teorię homologii – metodzie aproksymacji symplicjalnej, sumowanie ilości sympleksów można zastąpić sumowaniem liczb Bettiego, które są niezależne od triangulacji.

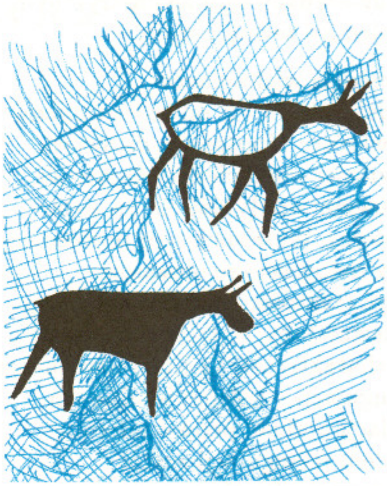
Nie sposób wymienić tu dostatecznie dużej cząstki spośród ważnych problemów i rozstrzygnięć topologii geometrycznej, aby dać pojęcie o sile jej rezultatów. Ale wspomnijmy J.H.C. Whiteheada, który przedstawił kostkę euklidesową wymiaru 10 w postaci produktu kostki wymiaru 7 i pewnego wielościanu różnego topologicznie od I^3, inwolucję ciągłą na sferze S^4 – zbudowaną przez Binga – której zbiór punktów stałych nie jest sferą, nierozstrzygniętą do tej pory hipotezę Poincarégo, oraz to, że dawne metody Koebego odżyły u Thurstona w jego próbach klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych. Wyraźnie określone i trudne problemy stawiają tę gałąź topologii w centralnym miejscu matematyki. Tendencje algebraizujące z lat sześćdziesiątych osłabły.

Topologia mnogościowa jest nie tylko dlatego inna, że jest mnogościowa, lecz głównie dlatego, iż nie stawia sobie niczego za cel. Jej charakter metafizyczny określił Cantor w swoim manifeście matematyki wyzwolonej. Chociaż początkowo traktowana była przede wszystkim jako pomoc w badaniu własności figur geometrycznych danych punktowo, to już od lat trzydziestych obiekty, takie jak βN, discontinua Cantora, przestrzenie normalne Moore'a, uwolniły topologię mnogościową z więzów użytkowości. Patrząc na ten okres topologii mnogościowej, trudno nie poddać się nostalgii. Zdawało się, że odkrycia mnogościowe Cohena przedłużą w sposób istotny ten imponujący rozwój. Ale nieokreśloność celów – tak początkowo atrakcyjna – doprowadziła do tego, co można porównać z zadeptaniem środowiska naturalnego. Czy musiały powstać przestrzenie motylowe i kosmetyczne, gdzie autorzy jednego z tych pojęć atakowali autorów drugiego – i na odwrót – za udziwnienia? Odegrały rolę niekorzystne warunki zewnętrzne w postaci zasilania środkami materialnymi, co w zakresie dyscyplin mających charakter swobodnej gry myśli nie ma uzasadnienia. Powodowało to szybkie rozwiązywanie zagadnień, co skutkowało poszukiwaniem problemów ciągle nowych, bez oglądania się na ich umotywowanie. Rozwiązania nie zawsze były gruntowne i na pobitewnym polu pozostało wiele skarbów. Wracanie do nich jest przeciwne naturze poszukiwaczy.

Topologowie naszej generacji głoszą, że topologia ginie, że powinna wrócić do swych źródeł w fizyce, którą uznają za oparcie w każdym kryzysie. Chodzi o nieokreśloność problemów, od czego nie jest wolna i geometryczna część topologii, a więc o kryzys zasad metafizycznych. Ale, jeśli fizyka miałaby ten kryzys rozwiązać, musiałaby być sama metafizycznie ugruntowana. Wpadamy w błędne koło – bo fizyka szuka – chociaż z innych przyczyn – oparcia

Rozwiązanie zadania M 890.
Niech $f(x) = x^2 - x + a$, $g(x) = x^{13} + x + 90$. Mamy $f(0) = f(1) = a$, $g(0) = 90$, $g(1) = 92$, a zatem liczba a powinna dzielić największy wspólny dzielnik 90 i 92, czyli 2. Ponadto, $f(-1) = a + 2$, $g(-1) = 88$, skąd wynika, że a nie może być równe 1 ani -2. Wreszcie, $f(-2) = a + 6$, $g(-2) = -8104$, więc z pewnością $a \neq -1$.

Z tych rozważań wynika, że o ile liczba a, o której mowa w treści zadania, w ogóle istnieje, to $a = 2$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $x^2 - x + 2$ istotnie jest dzielnikiem $x^{13} + x + 90$.



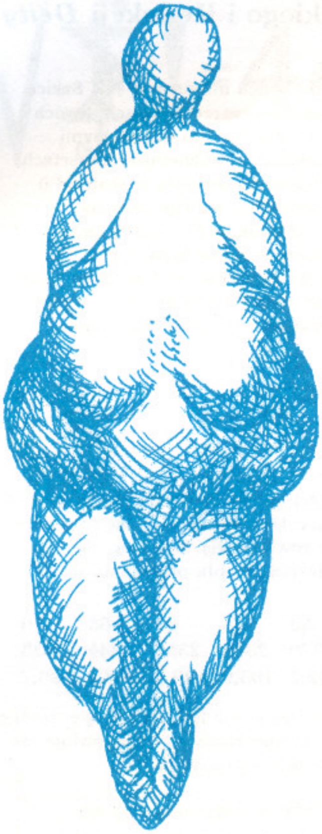
w matematyce, nie wyłączając topologii. Według powszechnego poglądu fizyka to fizyka formalizmów matematycznych algebry i analizy matematycznej. Tymczasem fizyka współistnieje z matematyką dopiero od Newtona, a więc niewiele więcej niż trzy stulecia. Zapomina się o jej niematematycznej prehistorii sięgającej Arystotelesa, która fizykę ukształtowała metafizycznie. Dwudziesty wiek obarczył fizykę zadaniami, dla których obecnie stosowany formalizm matematyczny staje się nieadekwatny, zarówno na poziomie fizyki cząstek elementarnych, jak i w teoriach kosmologicznych. Ma się nieraz wrażenie, że jest stosowany przez fizyków magicznie.

Mówiąc o wymiarze przestrzeni, myślimy o trzech wzajemnie prostopadłych wektorach, nie zważając na to, że fizyczność reperu trzech wektorów ma uzasadnienie jedynie w naszych warunkach ziemskich, gdzie Ziemia w swojej płaszczyźnie daje dwa z nich, a kierunek ciężaru trzeci. Jeśliby nam przyszło rozwinąć cywilizację w miejscu, gdzie brak grawitacji, skąd wzięłaby się w naszym umyśle prostopadłość? Niech to pytanie będzie sygnałem wątłości naszych przesłanek co do wyboru konwencji matematycznych, które są dalekie od uniwersalności. Mimo to wymiarem, opartym na pojęciu reperu wzajemnie prostopadłych wektorów, fizycy posługują się nie tylko w makroświecie, ale i w mikroświecie, o którym już Riemann pisał, że zapewne rządzi się inną geometrią.

Aby wyjść z trudności, weźmy na pomoc topologię. Henri Lebesgue zaproponował w latach dwudziestych widzenie wymiaru takie, w którym każdy element pojęciowy ma sens fizyczny. Przyjmijmy za Lebesguem, że przestrzeń jest wymiaru nie większego niż n, jeśli ma dowolnie drobne pokrycia zbiorami otwartymi, takie, że nie więcej niż $n+1$ spośród tych zbiorów może się przecinać, i przyjmijmy za wymiar przestrzeni najmniejszą spośród wspomnianych liczb n. Jednym z największych osiągnięć topologii początku naszego wieku był dowód, że dla przestrzeni euklidesowych wymiar Lebesgue'a pokrywa się z ich wymiarem wektorowym. Ale wymiar Lebesgue'a ma sens dla wszelkiego rodzaju przestrzeni, a elementy składające się na to pojęcie – przecinanie się i pokrywanie figur oraz ich rozdrabnianie się ku zeru – mają uniwersalny sens fizyczny. Wymiar przestrzeni w danym jej miejscu jest mały, jeśli sąsiedztwo tego miejsca, złożone z komórek pokryć, jest ubogie przy rozdrabniających się pokryciach. Ustalenie wymiaru można wyobrazić sobie jako czynność fizyczną. Fizycy obserwują, że kwark może kontaktować się naraz z bardzo wielką ilością innych, co znaczy, że jego przestrzeń jest bardzo luźna, tj. że jej wymiar jest duży. Wymiar naszej części makrokosmosu – wynikający z naszych doświadczeń z ciałami sztywnymi – jest 3. Czy utrzymuje się w dalszych jego partiach?

Przed dwudziestu mniej więcej laty wysłano w przestrzeń informację o naszej cywilizacji. Było tam twierdzenie Pitagorasa, uważane przez nas za uniwersalne dla każdej możliwej do pomyślenia matematyki. Tymczasem, wystarczy sobie wyobrazić istoty, których matematyka jest oparta na reagowaniu na dwa symbole: 1 i 0. Wiemy, że ten drobny początek wystarczy, by rozwinąć to w imponujący system liczb dwuadycznych, które można dodawać, odejmować, mnożyć, a nawet dzielić. Nie ma wśród nich jednak liczby, która pomnożona przez siebie daje 2. Posługujący się tą arytmetyką i geometrią na niej opartą nie zapytają o twierdzenie Pitagorasa.

Odgałęzieniem topologii przestrzeni euklidesowych jest teoria kontinuów, najpierw lokalnie spójnych, które są figurami o dostatecznej regularności. Ale uwagę bardziej przyciągają ich osobliwości. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego – przy prostym opisie globalnym – dostarcza nadal trudnych problemów dotyczących jej zachowania się przy odwzorowaniach. Krzywa Mengera ukazuje swoje różne nieoczekiwane oblicza, zależnie od położenia w przestrzeni. Ale jeszcze osobliwsze jest zachowanie się pseudołuku – kontinuum dziedzicznie nierozkładalnego wężowego. Jest ono homeomorficzne z każdym swoim podkontinuum wielopunktowym, na które można je zretrahować – w czym jest podobne do odcinka – ale – podobnie jak okrąg – jest przestrzenią jednorodną.



Ma na sobie nietożsamościowe inwolucje ciągłe dowolnie bliskie tożsamości. Niektóre z kontinuów wężowych – przy pewnych położeniach na płaszczyźnie – są atraktorami homeomorfizmów płaszczyzny, ale nie wiadomo, czy atraktorem może być pseudołuk. Wspólne brzegi trzech obszarów – jezior Wady – zapoczątkowały tę dyscyplinę, która atrakcyjnością porównywalna jest z teorią liczb.

Wartość teorii matematycznych oceniana bywa ich użytecznością. Topologia – nawet ogólna – wykazała użyteczność, dając ogólniejszy wgląd w inne teorie matematyczne. W XX wieku nastąpiło coś, co można by nazwać topologizacją matematyki.

Ale użyteczność z czasem się wyczerpuje. Przestrzeń βN mówiła coś o problemie ciągłego przedłużania funkcji. Teraz raczej podziwiamy jej strukturę wewnętrzną, problem przedłużania funkcji widząc dla niej jako marginalny. Przyjdzie czas, że nic nowego o tej przestrzeni nie będzie już do powiedzenia. Ale nie przestaniemy jej podziwiać, tak jak nie przestajemy podziwiać Koncertów Brandenburskich Bacha.

Nieefektownym wydaje się los teorii matematycznej w roli eksponatu muzealnego. Ale pomyślmy, że ten los może spotkać rachunek prowadzący od zasad dynamiki Newtona do praw Keplera. Ruchy planet nie są tak idealne jak opis dany tymi prawami. Odchylenia lepiej odda manipulacja komputerowa niż trud matematyka. Przyjemnie więc będzie dla kontrastu zobaczyć kiedyś w muzealnym otoczeniu elegancki – wygładzony przez upływ wieków – wywód Newtona. Niewdzięczny będzie los dokonań matematycznych, które nie znajdą tam miejsca.

Chcielibyśmy, by nasze dokonania pozostały w matematyce wiecznie. Ale nawet jeśli sama matematyka jest wieczna i jest podobna do drzewa, które stale rośnie, to jego gałęzie śledzone z osobna mogą wieczne nie być. Drzewem – dodajmy, że szczupłym (to ważne!) – które samo jest wieczne – a żadna z jego gałęzi taką nie jest, jest drzewo Suslina. Jednym z dokonań XX wieku – w którym topologia miała swój udział – jest to, że bez sprzeczności można takie drzewo pomyśleć.

Zadania

Przygotował Paweł STRZELECKI

M 889. Udowodnić, że najmniejsza liczba całkowita większa od $(\sqrt{3}+1)^{2m}$ jest podzielna przez 2^{m+1}.
Rozwiązanie na str. 14

M 890. Dla jakiej liczby całkowitej a wielomian $x^{13}+x+90$ jest podzielny przez x^2-x+a?
Rozwiązanie na str. 11

M 891. Wykazać, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1999^{n^2}}$ jest liczbą niewymierną.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 505. Odejmując od ciężaru naczynia z gazem ciężar samego naczynia, można znaleźć ciężar gazu. Ale molekuły „latają" po całym naczyniu, w jaki więc sposób można wyznaczyć ciężar gazu?
Rozwiązanie na str. 6

F 506. Naczynie zaopatrzone w manometr napompowano powietrzem. Następnie otwarto kurek łączący naczynie z otoczeniem, aby nastąpiło wyrównanie ciśnień na zewnątrz i wewnątrz naczynia, po czym od razu kurek zamknięto. Po pewnym czasie ciśnienie w naczyniu ponownie wzrosło. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 10