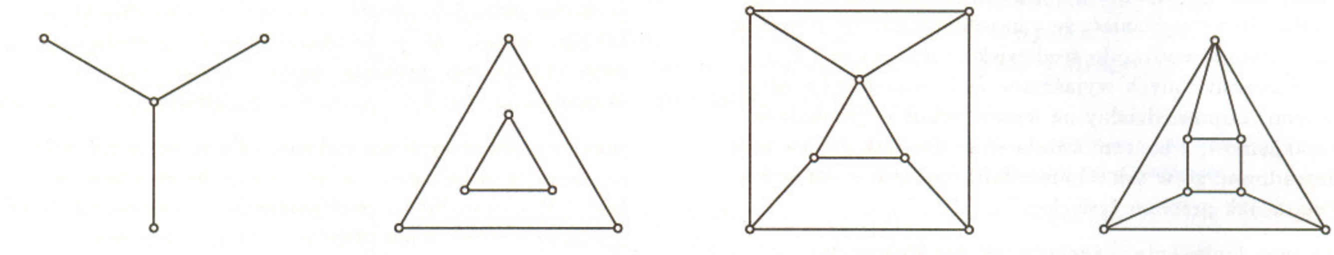
Wielościany foremne w krainie Płaszczaków

Od dawien dawna (a ściślej od czasów Euklidesa) wiadomo, że istnieje tylko pięć wypukłych brył foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan. Bryły są, rzecz jasna, tworami przestrzennymi, spróbujemy jednak wykazać ów znany od stuleci fakt, nie wychodząc z płaszczyzny.

Wprowadźmy zatem na scenę graf (którym to określeniem będziemy nazywać tu tylko te obiekty, które w prawdziwej teorii nazywają się grafami planarnymi).

Otóż graf to po prostu pewien zbiór punktów (wystarczą nam zbiory skończone), zwanych *wierzchołkami*, i linii, zwanych *krawędziami*, z których każda łączy dwa wierzchołki. Zakładamy dodatkowo, że owe linie można zawsze narysować na płaszczyźnie tak, by żadne dwie nie miały punktów wspólnych poza wierzchołkami (to jest właśnie owa planarność). Oto parę przykładów:



(a) (b) (c) (d)

Rys. 1. Nie rozróżniamy grafów, które – choć narysowane inaczej – realizują ten sam system połączeń między wierzchołkami, jak (c) i (d).

Dla celu, jaki sobie wytyczyliśmy, będziemy rozpatrywać grafy z jeszcze jedną, dodatkową własnością: przyjmiemy mianowicie, że krawędzie grafu tworzą na płaszczyźnie przylegające wielokąty (choć niekoniecznie z prostoliniowymi bokami) i to tak, by żaden z nich nie był całkowicie otoczony przez inny, a z każdego wierzchołka można było dojść po krawędziach do każdego innego. Takie grafy nazwiemy *wielokątnymi*. Na rysunku 1 jest nim tylko graf (c) – czyli (d) – bowiem (a) nie składa się z wielokątów, a w (b) jeden wielokąt otacza drugi. Wśród wielokątów grafu są takie, które nie zawierają w swoim wnętrzu żadnej krawędzi: nazwiemy je *ścianami* grafu – ale to nie wszystko: uznamy, że każdy graf ma jeszcze jedną ścianę (nieskończoną), którą jest cała część płaszczyzny na zewnątrz grafu. Wówczas graf z rysunku 1(c) będzie miał 6 ścian, z których każda jest ograniczona 3 lub 4 krawędziami – nawet ściana nieskończona, którą ograniczają cztery zewnętrzne krawędzie grafu.

Możecie się przekonać, że graf 1(c) można narysować tak – nie zmieniając połączeń między wierzchołkami – by dowolna z jego ścian stała się ścianą nieskończoną.

Ciekawostką jest fakt, że dla grafów wielokątnych zachodzi tzw. wzór Eulera, znany Wam, być może, w wersji dla wielościanów: jeśli przez w oznaczymy liczbę wierzchołków bryły, przez k liczbę jej krawędzi,

a przez s liczbę ścian, to

$$w - k + s = 2.$$

Otóż tak samo jest dla grafów wielokątnych, z czego nie omieszkamy niebawem skorzystać.

Pora wreszcie zająć się zapowiedzianym problemem. Powiemy, że graf G jest całkowicie regularny, jeśli w każdym wierzchołku spotyka się zawsze tyle samo krawędzi oraz każdą ścianę ogranicza też taka sama liczba krawędzi. Ileż to może być takich grafów całkowicie regularnych? Wdajmy się w obliczenia. Niech m będzie liczbą krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka, a m' liczbą krawędzi ograniczających każdą ścianę. Wówczas, jak łatwo się przekonać,

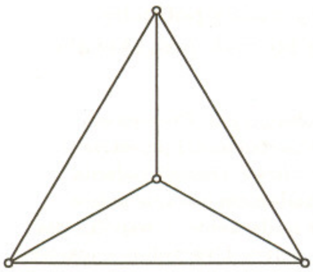
$$2 \cdot k = m \cdot w = m' \cdot s,$$

czyli $k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot w$ i $s = \frac{m}{m'} \cdot w$. Podstawmy te wartości do wzoru Eulera (nadszedł jego czas!):

$$w\left(1 - \frac{1}{2}m + \frac{m}{m'}\right) = 2,$$

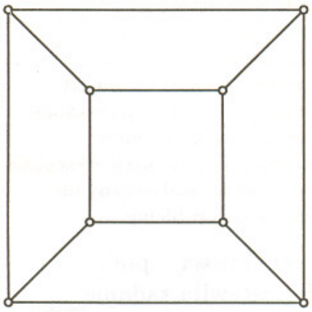
albo inaczej: $w(2m' - mm' + 2m) = 4m'$. Wyrażenie w nawiasie musi być, rzecz jasna, dodatnie, więc (szczegóły prostego obliczenia wspaniałomyślnie zostawiamy Czytelnikowi) mamy warunek

$$(m' - 2) \cdot (m - 2) < 4.$$

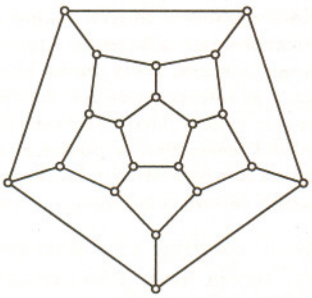


(1)

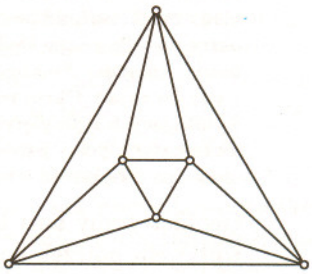
Pamiętając o naszych docelowych wielościanach (nawet Płaszczaki – wspaniałe, choć całkowicie płaskie istoty z książki Edwina Abbotta – słyszały o ich istnieniu), możemy założyć, że każda z liczb m i m' jest większa od 2. Okazuje się, że jedynymi rozwiązaniami ostatniej nierówności są następujące pary wartości tych liczb: (1) $m = 3$ i $m' = 3$, (2) $m = 3$ i $m' = 4$, (3) $m = 3$ i $m' = 5$, (4) $m = 4$ i $m' = 3$ oraz (5) $m = 5$ i $m' = 3$. Z poprzednich wzorów, wiążących liczby w, k i s, łatwo wynika, że w przypadku (1) są one równe odpowiednio 4, 6, 4, dla (2) to 8, 12, 6, dla (3) mamy 20, 30, 12, dla (4) wychodzi 6, 12, 8, a dla (5) 12, 30, 20. Te liczby ścian wydają się coś przypominać… I rzeczywiście:



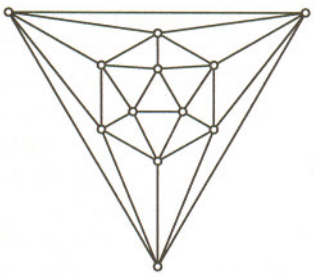
(2)



(3)



(4)



(5)

Rys. 2. (1) czworościan, (2) sześcian, (3) dwunastościan, (4) ośmiościan, (5) dwudziestościan.

Twierdzenie udowodnione (niestety, nie po raz pierwszy). W nagrodę mała zabawa. Co wyjdzie, jeśli w grafie sześcianu narysujemy kropkę wewnątrz każdej ściany, a potem połączymy każdą parę kropek sąsiadujących ścian tak, by łącząca je linia przecięła wspólną dla obu ścian krawędź sześcianu (nie zapomnijmy o ścianie nieskończonej)? A co będzie, gdy zrobimy to samo z ośmiościanem? A z pozostałymi trzema grafami?

Powodzenia!

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL