Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

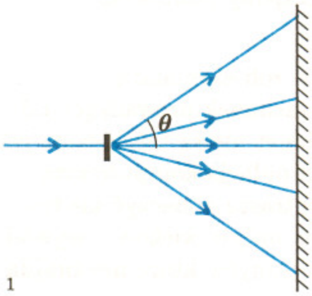
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1999

Przypominamy treść zadań:

276. Izolowane termicznie naczynie jest przedzielone na dwie części: jedna część zawiera 50 g wody o temperaturze 70°C, a w drugiej (o objętości 0,2 m^3) jest próżnia. Usunięto przegrodę rozdzielającą obie części. Obliczyć końcową temperaturę wody i pary (w stanie równowagi). Dane są: ciepło właściwe wody $c = 4{,}19$ J/(g·K) oraz tabela przedstawiająca zależność ciepła parowania wody q oraz gęstości pary wodnej nasyconej ϱ od temperatury:

T (°C)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
q (J/g)	2471	2460	2448	2437	2425	2414	2402	2391	2379	2368	2357	2345	2333
ϱ (g/m^3)	9,40	12,8	17,3	23,0	30,3	39,5	51,0	65,3	82,7	103,9	129,5	160,2	196,7

277. Promień światła pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 2$ µm, za którą w pewnej odległości znajduje się ekran (rys. 1). Zaobserwowane na ekranie widmo zostało przedstawione na okładce *Delty* 4/1999. Obliczyć długości fali trzech zaznaczonych linii widmowych.



Rys. 1

276. Zamiast rozpatrywać parowanie kolejnych porcji wody w zmieniającej się temperaturze, rozważmy równoważny pod względem energetycznym (a znacznie prostszy) proces, w którym najpierw całą masę $M = 50$ g wody oziębiamy do końcowej temperatury T_k, odprowadzając na zewnątrz ciepło, a następnie przy ustalonej temperaturze zwracamy to ciepło, przeprowadzając pewną ilość wody w parę. Bilans ciepła ma postać

$$Mc(T_0 - T_k) = V\varrho(T_k)q(T_k),$$

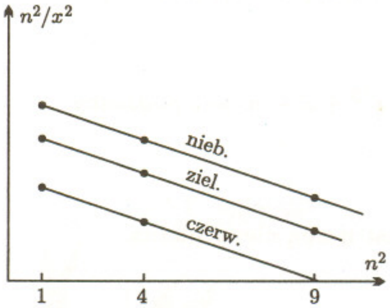
gdzie $T_0 = 70°$C jest temperaturą początkową, a $V = 0{,}2$ m^3 (pomijamy niewielkie zwiększenie tej objętości wynikające ze zmniejszenia się ilości wody oraz z rozszerzalności cieplnej). Widzimy, że należy uzupełnić tabelkę o rubrykę z wartościami iloczynu $\varrho \cdot q$ i wyznaczyć (graficznie lub metodą prób i błędów) punkt przecięcia z prostą opisaną wyrażeniem $(Mc/V)(T_0 - T_k)$. Znajdujemy $T_k \approx 22 \div 23°$C.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 270 (WT=2,28) i 271 (WT=3,14) z numeru 1/1999

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	29,54
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	29,08
Aleksander Surma	– Myszków	20,83
Artur Arciszewski	– Kielce	15,62

277. Oznaczmy zmierzoną odległość danej linii od środka (linii światła białego na rysunku) przez x, a nieznaną odległość ekranu od siatki dyfrakcyjnej przez l – zatem we „wzorze siatkowym" $d\sin\theta = n\lambda$ należy podstawić $\sin\theta = x/\sqrt{x^2 + l^2}$. Pojedynczy pomiar x nie pozwala, oczywiście, wyznaczyć dwóch niewiadomych l i λ. Brakującą informację można jednak uzupełnić na podstawie kilkakrotnego pomiaru x dla różnych rzędów widma tej samej linii. Przekształcając wzór siatkowy, doprowadzamy go do postaci szczególnie wygodnej do analizy graficznej

$$n^2 + \frac{n^2}{x^2}l^2 = \frac{d^2}{\lambda^2}.$$



Rys. 2

Odłóżmy na jednej osi wykresu wielkość n^2, a na drugiej n^2/x^2 (rys. 2). Widzimy, że punkty odpowiadające tej samej długości fali układają się wzdłuż równoległych prostych. Nachylenie tych prostych pozwala wyznaczyć l, a punkt przecięcia z osią n^2 daje wielkość n'^2 odpowiadającą formalnemu podstawieniu $n^2/x^2 = 0$ w powyższym wzorze (czyli kątowi θ równemu 90°). Odczytujemy z wykresu dla linii niebieskiej $n'^2 = 18{,}5$, $n' = 4{,}30$, czyli $\lambda = d/n' = 0{,}465$ µm. W podobny sposób dla linii zielonej znajdujemy $\lambda = 0{,}53$ µm, a dla linii czerwonej $\lambda = 0{,}66$ µm.

Rozwiązanie zadania M 889.

Najmniejsza liczba całkowita większa od $a = (\sqrt{3}+1)^{2m}$ jest równa

$$b = (\sqrt{3}-1)^{2m} + (\sqrt{3}+1)^{2m}.$$

(Liczba b jest całkowita, gdyż składniki z nieparzystymi potęgami $\sqrt{3}$ występują w rozwinięciach obu dwumianów z przeciwnymi znakami; ponadto $\sqrt{3}-1 < 1$, a więc $b - a < 1$.)

Ponieważ $(\sqrt{3} \pm 1)^2 = 4 \pm 2\sqrt{3}$, więc

$$b = (4-2\sqrt{3})^m + (4+2\sqrt{3})^m = 2^m\left[(2-\sqrt{3})^m + (2+\sqrt{3})^m\right].$$

Liczba $(2-\sqrt{3})^m + (2+\sqrt{3})^m$ jest całkowita i parzysta (składniki, które nie redukują się, gdy dodajemy rozwinięcia obu m-tych potęg dwumianów, można połączyć w pary). Stąd już wynika teza zadania.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1999

Przypominamy treść zadań:

379. Dla danej liczby naturalnej parzystej $n \geq 2$ znaleźć wszystkie układy liczb $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniające warunki: $0 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_{i+1}) = \frac{n}{2} \qquad \text{(przyjmujemy } x_{n+1} = x_1\text{)}.$$

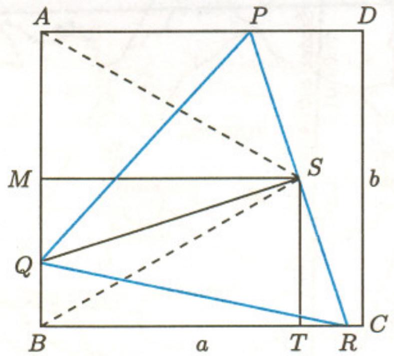
380. Obliczyć maksymalną wartość pola trójkąta równobocznego, którego wszystkie wierzchołki leżą na brzegu prostokąta o bokach długości a, b (dla danych liczb $a \geq b > 0$).

379. Niech $(x_1, \ldots, x_n)$ będzie układem liczb spełniającym podane warunki. Przyjmijmy $y_i = 2x_i - 1$ dla $i = 1, \ldots, n$; skoro $0 \leq x_i \leq 1$, to $|y_i| \leq 1$. Ponadto

$$\frac{n}{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 + y_i}{2}\left(1 - \frac{1 + y_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(1 + y_i)(1 - y_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(1 + y_i - y_{i+1} - y_i y_{i+1}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(1 - y_i y_{i+1}) = \frac{1}{4}\left(n - \sum_{i=1}^{n} y_i y_{i+1}\right),$$

skąd $\sum_{i=1}^{n} y_i y_{i+1} = -n$. Dla liczb y_i o modułach nie większych od 1 otrzymana równość oznacza, że każdy z iloczynów $y_i y_{i+1}$ ma wartość -1, czyli że układ liczb $(y_1, \ldots, y_n)$ jest złożony z jedynek i minus jedynek, występujących na przemian. Układ $(x_1, \ldots, x_n)$ ma w takim razie postać $(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ lub $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$. Te dwa układy stanowią pełne rozwiązanie zadania.



380. Weźmy pod uwagę dowolny trójkąt równoboczny wpisany w prostokąt $ABCD$ o bokach długości $|BC| = |DA| = a$, $|AB| = |CD| = b$; $a \geq b$. Na każdym z odcinków BC, DA musi leżeć wierzchołek trójkąta. Łączący te wierzchołki bok trójkąta jest nachylony do prostych BC i DA pod kątem $\varphi \geq 60°$, a więc jego długość nie przekracza $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,b$. Mamy zatem górne oszacowanie długości boku trójkąta. Będzie ono osiągnięte, gdy $\varphi = 60°$; na jednym z odcinków BC, DA leżą wówczas dwa wierzchołki trójkąta. Warunek na to, aby taki trójkąt istniał – to nierówność $a \geq \frac{2}{3}\sqrt{3}\,b$, czyli $b \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$.

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy ten warunek nie jest spełniony, czyli gdy $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ (prostokąt $ABCD$ ma kształt zbliżony do kwadratu). Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez P, Q, R tak, by $P \in DA$, $R \in BC$; trzeci wierzchołek Q leży na jednym z krótszych boków prostokąta – na przykład na boku AB – i nie pokrywa się z żadnym z punktów A, B. Można założyć, że $|AP| \leq |BR|$; wtedy $|AQ| \geq |BQ|$.

Oznaczmy środki odcinków AB i PR odpowiednio przez M i S, i niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na odcinek BR. Trójkąty SMQ i STR (o przyprostokątnych odpowiednio prostopadłych) są podobne, więc $|SM| : |ST| = |SQ| : |SR| = \sqrt{3}$. Stąd $|SM| = \sqrt{3} \cdot |ST| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}b$, co oznacza, że trójkąt ABS jest równoboczny.

Wykazaliśmy w ten sposób, że – w rozpatrywanym przypadku ($b > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$) – wszystkie trójkąty równoboczne PQR ($P \in DA$, $Q \in AB$, $R \in BC$) mają wspólny środek boku PR: jest nim wierzchołek S trójkąta równobocznego ABS. Odcinek PR ma maksymalną długość, gdy punkt R pokrywa się z C. Kąt BCS jest większy od $60°$ (bo $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$), a więc wierzchołek Q trójkąta równobocznego PQR nie ucieknie z odcinka AB. Prosty rachunek pokazuje, że $|CS| = \sqrt{a^2 - \sqrt{3}ab + b^2}$. Największy trójkąt równoboczny wpisany w prostokąt $ABCD$ (gdy $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$) ma bok dwukrotnie dłuższy.

Obliczamy pola znalezionych w obu przypadkach trójkątów równobocznych i otrzymujemy odpowiedź:

$$\text{maksymalne pole} = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{3}\,b^2, & \text{gdy } b \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a; \\ \sqrt{3}(a^2 + b^2) - 3ab, & \text{gdy } b > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a. \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania M 891.

W układzie liczenia o podstawie 1999 suma rozważanego szeregu jest równa $0,1001000010000001\ldots$ (kolejne jedynki występują na tych miejscach po przecinku, których numery są pełnymi kwadratami). Rozwinięcie nie jest okresowe, gdyż między dwiema jedynkami pojawiają się ciągi zer, których długości są kolejnymi liczbami parzystymi. A zatem suma szeregu nie jest liczbą wymierną, bowiem wszystkie liczby wymierne mają (w układzie o dowolnej podstawie całkowitej!) rozwinięcia skończone lub okresowe.