

# Dzwonnik z Londynu

Francesc ROSSELLÓ

Zanim Lagrange zaczął stosować permutacje do badania równań algebraicznych, pewien Anglik uczynił z nich użytek w sposób bardzo przypominający o sto lat późniejszą teorię grup. Mowa o Fabianie Stedmanie, urodzonym w 1640 r. w Londynie, drukarzu, a potem – aż do śmierci w 1713 r. – poborcy podatkowym. Do historii wprowadziło Stedmana jego hobby. Należał do przeróżnych stowarzyszeń miłośników muzyki dzwonów, a jego dwie książki *Tintinnalogia* (1668) i *Campanalogia* (1677) czynią z niego ojca nowoczesnego dzwonienia. To, co może nas tu zainteresować, to elementy teorii grup, które można odnaleźć w jego pracach – cały długi wiek przed Lagrangem.

Grupa – algebra  $(G, o, ^{-1}, e)$ , w której  $o$  jest dwuargumentowym działaniem łącznym,  $e$  elementem neutralnym względem  $o$ , a  $^{-1}$  taką funkcją, że  $a o a^{-1} = e = a^{-1} o a$  dla każdego elementu  $a$  grupy.

W Anglii (a także, w mniejszym stopniu, w innych krajach pod brytyjskim wpływem) gra na dzwonach nie polega na układaniu ślicznych melodii, lecz na tworzeniu ciągów uderzeń, w stylu zwanym *change ringing*: w  $n$  dzwonów, ponumerowanych  $1, 2, \dots, n$ , uderza się kolejno w różnych permutacjach (w języku dzwonników zwanych *sekwencjami*). Z przyczyn technicznych każde przejście do kolejnej sekwencji (czyli *zmiana*) musi być zadane rozłącznymi transpozycjami sąsiadujących dzwonów: *zmiana prosta* składa się z jednej takiej transpozycji, natomiast *zmiana skrzyżowana* dopuszcza ich więcej (koniecznie rozłącznych).

Transpozycja – permutacja polegająca na tym, że dwa elementy zamienia się miejscami.

Utrzymana w tym stylu kompozycja, zwana *biciem*, jest więc ciągiem następujących po sobie sekwencji, zaczynającym się i kończącym sekwencją *okrągłą*  $(1, 2, \dots, n)$ ; od sekwencji do sekwencji prowadzi zmiana prosta lub złożona. Możemy zatem traktować bicie jako ciąg permutacji  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  zbioru  $n$ -elementowego, z których każda jest złożeniem rozłącznych transpozycji, a złożenie wszystkich, czyli  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$  jest permutacją identycznościową  $e$ ; powiemy wówczas, że *bicie* odpowiada *ciąg* *okrągłą*  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k = e$  jest

$$\begin{array}{l} e \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_1 \cdot \sigma_k - 1 \\ e \end{array}$$

Od bicia oczekiwano następujących własności (zwanych przez dzwonników, o dziwo, *aksjomatami*):

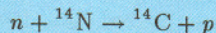
- Każde bicie ma się zaczynać i kończyć sekwencją okrągłą (o czym już była mowa).
- Przy przejściu od jednej sekwencji do następnej żaden dzwon nie może się przesunąć o więcej niż jedno miejsce w ciągu.
- Żadna sekwencja nie może wystąpić dwa razy w jednym biciu.
- Żaden dzwon nie może pozostać na tej samej pozycji w trzech kolejnych sekwencjach.
- Całe bicie musi być podzielone na palindromiczne części (zwane *układami*) jednakowej długości (czyli ciąg zmian, czytany od tyłu, jest taki sam, jak w normalnej kolejności).

## Fizyczne metody datowania w badaniu prehistorii człowieka

Grzegorz WROCHNA

*Homo sapiens* to jedyny w przyrodzie gatunek, który stawia sobie pytania o swoją własną przeszłość. Kiedy pojawił się na naszej planecie? Jak do tego doszło? Czy wyodrębnił się spośród innych gatunków w sposób ciągły, na drodze powolnej ewolucji, czy też raczej skokowy, z wyraźnie określonym początkiem? Jeśli ciągły, to jak wyglądały ogniwa pośrednie? Jeśli skokowy, to jaki był mechanizm tego skoku? Te i inne pytania są domeną poszukiwań archeologicznych. Kiedy jednak archeolog znajdzie interesujący obiekt i zadaje sobie pytanie, z jakiego okresu on pochodzi, z pomocą przychodzi fizyka.

Największe usługi oddała tu metoda **radioizotopowa**, oparta na rozpadzie izotopu węgla  $^{14}\text{C}$ . Jest on produkowany w atmosferze przez neutrony powstałe wskutek oddziaływania protonów promieniowania kosmicznego z atmosferą



w ilości około 7,5 kg na rok. Rozpada się on samorzutnie z czasem połowicznego rozpadu  $\tau_{1/2} = 5730$  lat



Równowaga między produkcją a rozpadem ustala się na poziomie  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1,5 \cdot 10^{-12}$ . W atmosferze  $^{14}\text{C}$  łączy się z tlenem, tworząc radioaktywny dwutlenek węgla  $^{14}\text{CO}_2$ , który może być absorbowany przez rośliny podobnie jak normalny  $^{12}\text{CO}_2$ . Stąd może się też przedostawać do organizmów zwierzęcych. Dopóki organizm żyje i odżywia się, zachowuje stały stosunek  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ . Od momentu śmierci przestaje uzupełniać rozpadający się  $^{14}\text{C}$ , co powoduje zmniejszanie się stosunku  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ . Mierząc ten stosunek w badanej próbce, możemy zatem określić czas, jaki upłynął od śmierci organizmu.

Pierwszym sprawdzianem opracowanej w 1947 r. metody było porównanie zmierzonego wieku piramid egipskich z zapiskami historycznymi sprzed 2000–5000 lat. Pierwszym odkrywczym jej zastosowaniem było określenie wieku znanego z Biblii miasta Jerycho na 7000–8000 lat, dwa razy więcej niż dotychczas przypuszczano.

Dokładność metody  $^{14}\text{C}$  można poprawić, uwzględniając zmiany stosunku  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$  w atmosferze spowodowane zmianami intensywności promieniowania kosmicznego, klimatycznymi, itp. Takie cechowanie można przeprowadzić, porównując zmierzony wiek bardzo starych drzew z liczbą słoń w ich przekroju. Najlepiej do tego celu nadają się sosny *pinus aristata longaeva* rosnące w kalifornijskich górach White-Inyo. Najstarszy żywy okaz ma 4764 lata. Porównując zgęszczenia słoń (spowodowane chłodniejszym klimatem) młodszych i starszych drzew możemy tę metodę rozszerzyć do około 10 000 lat.

Pierwotnie zawartość  $^{14}\text{C}$  oceniano mierząc intensywność promieniowania. Od lat 80. liczbę atomów  $^{14}\text{C}$  ocenia się, wyodrębniając je z próbki za pomocą akceleratora sprzężonego ze spektrometrem masowym. Spektrometr masowy jest to magnes, który pod różnymi kątami odchyła rozprężone w akceleratorze jony o różnych stosunkach masy i ładunku. Próbkę (grafit lub  $\text{CO}_2$ ) jest jonizowana ujemnie (aby uniknąć pomyłki z  $^{14}\text{N}$ ) przez bombardowanie jonami cezu. Powstałe jony formuje się w wiązkę o energii typowo 25 kiloelektronowoltów i przepuszcza przez spektrometr, który wybiera jony o masie 14:  $^{14}\text{C}^-$ ,  $^{13}\text{CH}^-$ ,  $^{12}\text{CH}_2^-$ . Wiązka ta jest następnie przyspieszana do energii 1 megaelektronowolta (MeV) i zderzana z cząsteczkami gazu w celu rozbitcia  $^{13}\text{CH}^-$  i  $^{12}\text{CH}_2^-$ . Ostatecznie wiązkę rozpędza się do 8 MeV i spektrometrem wybiera  $^{14}\text{C}$ .

Metoda akceleratorowa jest dużo czulsza od tradycyjnej, gdyż do pomiaru wykorzystywane są wszystkie atomy  $^{14}\text{C}$  z próbki, a nie tylko te, które się aktualnie rozpadają. Pozwala ona sięgać do 40–50 tysięcy lat wstecz. Ograniczeniem jest zwykle czystość próbki. Po 40 000 lat zawartość  $^{14}\text{C}$  zmniejsza się do 1%. Tak więc domieszka 1% „nowego” węgla może dowolnie starą próbkę „odmłodzić” do 40 000 lat.

Aby sięgnąć wstecz jeszcze dalej, można zastosować radioizotopy o dłuższych czasach rozpadu. Do oznaczania wieku skamielin wykorzystuje się szereg uranowo-torowy. Uran rozpuszcza się w wodzie, tor nie. Dlatego skały osadowe w momencie tworzenia zawierają uran, a są wolne od toru. Stosunek  $^{238}\text{U}$  o  $\tau_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$  lat do powstałego

Ponadto, dobre bicie musiało być odpowiednio długie i zawierać jak najmniej różnych zmian (oczywiście, powtarzanych tyle razy, ile było to konieczne). Bicie, zawierające wszystkie możliwe dla danego zestawu dzwonów sekwencje, nazwiemy *pełnym*. Tak więc pełne bicie  $n$  dzwonów zawiera  $n! + 1$  sekwencji (łącznie z powtórzoną ostatnią sekwencją okrągłą). Popatrzmy (przykład obok) na bicie z 1621 roku, znane jako „Układ Podstawowy dla czterech dzwonów” i odpowiadające ciągowi 9 sekwencji.

(1, 2, 3, 4)  
(2, 1, 4, 3)  
(2, 4, 1, 3)  
(4, 2, 3, 1)  
(4, 3, 2, 1)  
(3, 4, 1, 2)  
(3, 1, 4, 2)  
(1, 3, 2, 4)  
(1, 2, 3, 4)

Jeśli przyjmiemy  $\sigma_1 = (1, 2)(3, 4)$  i  $\sigma_2 = (2, 3)$ , to zmiany, wykonywane w tej kompozycji, są następujące (w podanej kolejności):

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2,$$

bicie odpowiada zatem równości  $(\sigma_1\sigma_2)^4 = e$  w  $S_4$ . Nie jest ono szczególnie długie ( $S_4$  ma przecież 24 elementy, a  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  generują podgrupę  $D_4$ ), ale spełnia wszystkie pozostałe warunki. Zauważmy, na przykład, że powtarzanie zmiany  $\sigma_1$  zapewnia, iż żaden dzwon nie pozostanie na swoim miejscu przez trzy kolejne sekwencje. Bicie zawiera tylko jeden układ (stąd nazwa „Układ podstawowy”), widoczny zwłaszcza po odrzuceniu ostatniej zmiany  $\sigma_2$ , która ma doprowadzić do powrotu do sytuacji wyjściowej.

$S_n$ , tzw. grupa symetryczna zbioru  $n$ -elementowego, jest grupą wszystkich permutacji tego zbioru, w której  $\circ$  oznacza składanie permutacji.

$D_n$ , grupa wszystkich izometrii własnych  $n$ -kąta foremnego (podgrupa grupy  $S_n$ , jako że każda taka izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez pewną permutację wierzchołków  $n$ -kąta).

We wstępie do *Campanalogii* Stedman zapowiada wyjaśnienie „sztuki zmian, czysto matematycznej, lecz prowadzącej do zadziwiających efektów”. Popatrzmy na dwa przykłady z tej książki.

Jeśli we wspomnianym wyżej Układzie Podstawowym zastąpimy ostatnią zmianę  $\sigma_2$  przez  $\sigma_3 = (3, 4)$ , to możemy zbudować bicie pełne, zwane *Plain Bob Minimus*, następującej postaci (każda kolumna opisuje jeden układ):

(1, 2, 3, 4)	(1, 3, 4, 2)	(1, 4, 2, 3)
(2, 1, 4, 3)	(3, 1, 2, 4)	(4, 1, 3, 2)
(2, 4, 1, 3)	(3, 2, 1, 4)	(4, 3, 1, 2)
(4, 2, 3, 1)	(2, 3, 4, 1)	(3, 4, 2, 1)
(4, 3, 2, 1)	(2, 4, 3, 1)	(3, 2, 4, 1)
(3, 4, 1, 2)	(4, 2, 1, 3)	(2, 3, 1, 4)
(3, 1, 4, 2)	(4, 1, 2, 3)	(2, 1, 3, 4)
(1, 3, 2, 4)	(1, 4, 3, 2)	<u>(1, 2, 4, 3)</u>
		(1, 2, 3, 4)

Pierwsza kolumna to podgrupa  $D_4$  izometrii kwadratu, odpowiadająca Układowi Podstawowemu, druga to warstwa  $wD_4$  dla  $w = (\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_3$ , natomiast trzecia jest warstwą  $w^2D_4$ . Tak więc kolumnowy zapis tego bicia odpowiada podziałowi grupy  $S_4$  na warstwy podgrupy  $D_4$ . Zauważmy przy tym, że w każdej kolumnie występują te same zmiany, co w pierwszej (różne są jedynie wyjściowe sekwencje), stąd wszystkie dziedziczą własności pierwszej, a w szczególności są palindromami.

Warstwa (lewostronna) grupy  $G$  względem podgrupy  $H$  – każdy podzbiór postaci  $aH = \{a \circ h : h \in H\}$ . Jeśli  $aH \neq bH$ , to warstwy  $aH$  i  $bH$  są rozłączne.

Stedman zauważa, że gdy, tak jak przed chwilą, w danym układzie zastąpimy ostatnią zmianę inną, to otrzymamy kolumny o tej

samej liczbie elementów, a przy tym dwie z nich są albo równe (z dokładnością do kolejności elementów w sekwencji), albo rozłączne. Dziś wiemy, że jest to ogólna własność warstw w grupie. Ponadto dowodząc, że ciąg sekwencji jest istotnie biciem, Stedman korzysta z faktu, że  $wx = wy$  implikuje  $x = y$ , a  $w^k x = w^{k+1} y$  pociąga za sobą  $x = w^l y$ . Z pierwszej własności wynika, że jeśli wszystkie sekwencje w pierwszym układzie są parami różne, to podobnie jest w następnych układach, z drugiej zaś, że także powtórzenia sekwencji mają źródło w pierwszym układzie. Píše też, że w pełnym biciu „dwa dzwony (lub więcej) pozostają na swoich miejscach tyle razy, ile razy pozostałe dzwony mogą swoje miejsce zmieniać”, czyli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między permutacjami  $n$  elementów, które są stałe na  $k$  spośród nich, a permutacjami  $n - k$  elementów.

Kolejnym ważnym wkładem Stedmana do nauki o dzwonach jest kompozycja na 5 dzwonów (uogólniona na dowolną nieparzystą ich liczbę), znana jako „Stedman Doubles”. Na początku Stedman rozważa zmiany  $\sigma_1 = (1, 2)(4, 5)$  i  $\sigma_2 = (2, 3)(4, 5)$ . Ciągi, odpowiadające słowom  $\varphi_1 = (\sigma_1 \sigma_2)^2 \sigma_1$  i  $\varphi_2 = (\sigma_2 \sigma_1)^2 \sigma_2$  (wolna szóstka i szybka szóstka), wyznaczają wszystkie permutacje pierwszych trzech dzwonów, przesuując ostatnie dwa spośród nich w celu zachowania reguł bicia; odpowiada to równości  $((1, 2)(2, 3))^3 = e$  w  $S_3$ .

Dalej wprowadza się zmianę części  $\sigma_3 = (1, 2)(3, 4)$ , by połączyć sąsiednie szóstki (na przemian wolne i szybkie). Każde jej występowanie zmienia zbiór pierwszych trzech dzwonów; otrzymuje się bicie (złożone z 60 sekwencji), odpowiadające równości  $(\varphi_1 \sigma_3 \varphi_2 \sigma_3)^5 = e$ .

Permutacje  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  są parzyste, więc generują jedynie grupę alternującą  $A_5$ , zatem do otrzymania pełnego bicia wystarczy zastąpić ostatnie  $\sigma_3$  przez dowolną transpozycję i powtórzyć układ. Odpowiada to podziałowi na warstwy:  $S_5 = A_5 \cup \tau A_5$  dla dowolnej transpozycji  $\tau$ .

Grupa alternująca  $A_n$  – podgrupa  $S_n$ , złożona ze wszystkich permutacji, które można otrzymać jako złożenie parzystej liczby transpozycji.

Postępując podobnie z siedmioma dzwonami, biorąc dwie szóstki  $\sigma_1 = (1, 2)(4, 5)(6, 7)$  i  $\sigma_2 = (2, 3)(4, 5)(6, 7)$  i zmianę części  $\sigma_3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ , mamy

$$((\sigma_1 \sigma_2)^2 \sigma_1 \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_1)^2 \sigma_2 \sigma_3)^7 = e,$$

czyli układ początkowy z 84 sekwencjami. Aby otrzymać 5040 permutacji, Stedman proponuje zastosowanie  $\sigma_4 = (1, 2)(3, 4)(6, 7)$  i  $\sigma_5 = (1, 2)(3, 4)$  zamiast jednego lub obu wystąpień  $\sigma_3$  w poprzednim wyrażeniu i powtórzenie układu.

Na koniec postawił problem zbudowania pełnego bicia za pomocą jedynie  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Dziś oznacza to zbudowanie cyklu Hamiltona w grafie grupy  $S_7$ , generowanego przez  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ , utworzonego przez oba rodzaje naprzemiennie ustawionych szóstek, połączonych zmianami  $\sigma_3$  i  $\sigma_4$ .

Cykl Hamiltona – ciąg kolejno połączonych ze sobą krawędzi grafu, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz – z wyjątkiem pierwszego, w którym cykl się zaczyna i kończy.

Problem pozostawał nierozwiązany do 1995 roku, kiedy to rozwiązanie przedstawił zespół muzyczny Towarzystwa Absolwentów Uniwersytetu w Cambridge.

Tłumaczenie W.B.

zeń  $^{230}\text{Th}$  pozwala więc określić wiek skamieliny.

Metoda potasowo-argonowa, używana do datowania skał bazaltowych, wykorzystuje rozpad  $^{40}\text{K}$  o  $\tau_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$  lat na  $^{40}\text{Ar}$ . Argon ulatnia się z roztopionej lawy. W momencie zastygnięcia lava zawiera  $^{40}\text{K}$ , a jest wolna od  $^{40}\text{Ar}$ . Zawartość nowo powstałego  $^{40}\text{Ar}$  w skale bazaltowej pozwala określić moment jej zastygnięcia.

Najnowocześniejsze metody datowania wykorzystują zjawiska związane z defektami struktur krystalicznych. W niektórych kryształach (kwarc, kalcyt) elektrony mogą być przeniesione z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa dzięki promieniowaniu naturalnemu lub kosmicznemu. Dyfundując, mogą napotkać defekty sieci, w których zostaną uwięzione. Dostarczenie energii do próbki powoduje ich uwolnienie, po którym może nastąpić emisja fotonu. Tego typu emisję nazywamy luminescencją. W metodzie termoluminescencyjnej energii dostarcza się, podgrzewając próbkę. Metoda ta mierzy więc czas od ostatniego „wyzerowania” próbki, tj. uwolnienia wszystkich elektronów, co zachodzi w temperaturze powyżej  $300^\circ\text{C}$ . Mogło do tego dojść np. podczas rozgrzewania krzemienego narzędzia w ogniu bądź podczas wypalania wyrobów garncarskich. Im dłuższy czas minął od wyzerowania próbki, tym więcej elektronów w pułapkach, a więc i tym silniejsza luminescencja. W metodzie wymuszonej fotoluminescencji elektrony uwalnia się, naświetlając próbkę. Metoda ta jest czulsza od termoluminescencyjnej, gdyż uwalniane są w niej jedynie elektrony z płytszych pułapek i do wyzerowania próbki wystarczy silne nasłonecznienie. Dlatego nadaje się do datowania lessu, wydmy, pyłu w lodowcach, dna morskiego itp.

Liczbę elektronów w pułapkach można też zmierzyć za pomocą rezonansu spinowego. Próbkę umieszcza się w silnym, statycznym polu magnetycznym rzędu 1 tesli, które powoduje rozszczepienie poziomów energetycznych różnych stanów spinowych elektronów. Próbkę poddaje się następnie działaniu mikrofal o częstotliwości rzędu 1 GHz. Rezonansowe pochłanianie energii mikrofal zachodzi, gdy ich częstość odpowiada rozszczepieniu. Metoda ta ma olbrzymie

zasługi w badaniu prehistorii człowieka, gdyż znakomicie nadaje się do datowania emalii na zębach.

Metody magnetyczne wykorzystują zmienność kierunku ziemskiego pola w przeszłości. Domeny tlenku żelaza w rozgrzanym materiale (lawa, glina w piecu garncarskim) układają się zgodnie z polem magnetycznym Ziemi. „Zamrożona” magnetyzacja może być więc wykorzystana do datowania. W ciągu ostatnich 3 milionów lat bieguny ziemskiego magnesu zamieniały się miejscami 6 razy!

Odrębną grupę stanowią metody astro-klimatyczne. Opierają się one na korelacjach zmian położenia Ziemi względem Słońca i długoterminowych zmian klimatycznych oraz ich efektów fizycznych i biologicznych. Przykładowo, poziom oceanów był niższy w okresach zlodowaceń. Bogatsze nagromadzenie pyłków kwiatowych w osadach świadczy o okresach ocieplenia. Przenikalność magnetyczna osadów jest zależna od rozpuszczania magnetytu w procesach biologicznych. Stosunek stężeń izotopów  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  jest czuły na temperaturę, stosunek  $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$  jest zaś zależny od intensywności fotosyntezy. Poszukuje się coraz to nowych korelacji tego typu i choć metody na nich oparte są generalnie bardziej zawodne od metod radioizotopowych czy luminescencyjnych, stanowią często ich sprawdzian i cenne uzupełnienie.

Zobaczmy teraz, jak omówione metody przyczyniły się do poznania prehistorii człowieka. Do początków lat 80. panowało przekonanie, że rozwój biologicznych przodków człowieka zachodził równolegle na kilku kontynentach. *Homo erectus*, który pojawił się w Afryce około 2 mln lat temu, rozprzestrzenił się na całą Europę i Azję. Znalaziono nawet dziecko *homo erectus* na Jawie. „Normalne” namagnesowanie minerałów wokół znaleziska pozwoliło umiejscowić jego wiek między 1,79 a 1,95 mln lat temu. *Homo erectus* przekształcał się stopniowo w *archaic homo sapiens*, by około 100 tys. lat temu dać początek *homo neandertalsis*. W środowiskach odizolowanych *homo erectus* przetrwał niemalże do „naszych czasów”. Świadczą o tym dwa znaleziska na Jawie datowane za pomocą rezonansu spinowego na  $53 \pm 4$  i  $27 \pm 2$  tys. lat!

Neandertalczyk wyginał kilkadziesiąt tysięcy lat temu. Niemal jednocześnie

## Arytmetyczne figle

Jarosław GÓRNICKI

Matematyka jest nauką, którą charakteryzuje duży stopień precyzji. Oznacza to, że poruszanie się w ramach tego przedmiotu wymaga przestrzegania określonych reguł. Jak pokazuje historia (piszemy o tym w dalszej części), ich kształtowanie to nie jednorazowy akt, lecz długotrwały proces, w którym ważną rolę odgrywają *paradoksy*. Z jednej strony jaskrawo uwidaczniają one słabości naszych dotychczasowych koncepcji, a z drugiej pozwalają sprawdzić jakość naszej wiedzy i lepiej zrozumieć istotę używanych pojęć i metod. Wielokrotnie potrzeba wyjaśnienia odkrytego paradoksu stawała się impulsem postępu. Paradoksem zawdzięczamy przekonanie o konieczności formalizacji geometrii, teorii mnogości, rozwoju logiki i podstaw prawdopodobieństwa.

Poniżej przypominamy kilka szkolnych figli o charakterze rachunkowym, mając nadzieję, że Czytelnicy bez trudu wskażą w nich błędy prowadzące do fałszywych wniosków. Ostatnie dwa z nich mają swój udział w rygorystyce analizy i mogą być pretekstem do poważniejszych rozważań.

### Figiel 1.

Jeżeli  $a = b$  i  $b \neq 0$ , to

$$a \cdot b = a^2,$$

$$a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2,$$

$$b(a - b) = (a + b)(a - b),$$

$$b = a + b,$$

$$b = 2 \cdot b,$$

$$1 = 2.$$

### Figiel 2.

Niech  $a > b$ . Wtedy dla pewnego dodatniego  $c$

$$a = b + c,$$

skąd

$$a(a - b) = (b + c)(a - b),$$

$$a^2 - a \cdot b = b \cdot a + c \cdot a - b^2 - b \cdot c,$$

$$a^2 - a \cdot b - a \cdot c = a \cdot b - b^2 - b \cdot c,$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c),$$

$$a = b.$$

### Figiel 3.

Przyjmujemy  $i = \sqrt{-1}$ . Wówczas

$$\sqrt{x - y} = i \cdot \sqrt{y - x}.$$

Dla  $x = a$ ,  $y = b$  otrzymujemy

$$\sqrt{a - b} = i \cdot \sqrt{b - a}.$$

Natomiast dla  $x = b$ ,  $y = a$  mamy

$$\sqrt{b - a} = i \cdot \sqrt{a - b}.$$

Zatem

$$\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{b - a} = i^2 \cdot \sqrt{b - a} \cdot \sqrt{a - b},$$

$$1 = i^2,$$

$$1 = -1.$$

### Figiel 4.

$$i = i,$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{i} = \frac{i}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = i^2,$$

$$1 = -1.$$

### Figiel 5.

(J. Bernoulli;  
1667–1748)

$$(-1)^2 = 1,$$

$$\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0,$$

$$2 \ln(-1) = 0,$$

$$\ln(-1) = 0,$$

$$-1 = e^0,$$

$$-1 = 1.$$

### Figiel 6.

(J.R. d'Alembert; 1717–1783)

$$\text{Jeżeli } a \cdot d = b \cdot c, \text{ to } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Gdy w ostatniej równości  $a > b$ , to również  $c > d$ . Przyjmijmy więc:  $a = d = 1$ ,

$b = c = -1$ . Spełnione są wówczas warunki

$$a \cdot d = b \cdot c \text{ i } a > b,$$

musi więc być

$$c > d, \text{ czyli } -1 > 1.$$

### Figiel 7.

Wiadomo (Mercator 1668 r. – właściwie Nicolaus Kauffman, 1620–1687), że dla  $x \in (-1, 1]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Zatem dla  $x = 1$

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots, \\ 2 \ln 2 &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \ln 2, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

### Figiel 8.

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \right\} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0, \\ \ln 2 &= \ln 1, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Wyjaśnienie ostatnich dwóch paradoksów może sprawić pewien kłopot. Nie dość, że dotyczą one wykonywania nieskończenie wielu działań, to pojawia się w nich jeszcze swobodna zmiana kolejności składników (jak pamiętamy ze szkoły, jeśli nie ma nawiasów, to działania  $+$ ,  $-$  wykonujemy w kolejności ich występowania). To właśnie zmiana porządku wyrazów w powyższych nieskończonych sumach jest przyczyną paradoksalnych wyników. Ostatnie przykłady wykazują, że nie ma prostego przejścia od „matematyki wielomianowej”, opartej na obliczeniach wykonywanych zawsze na skończonej liczbie wyrazów, do „matematyki różniczkowej”, u podstaw której leżą procesy graniczne i działania nieskończone.

Jeszcze w XVIII wieku matematycy tej miary co L. Euler (1707–1783), G.W. Leibniz (1646–1716), matematycy z rodu Bernoullich, posługiwali się działaniami nieskończonymi bardzo swobodnie, było to niemal entuzjastyczne eksperymentowanie. Choć rozróżniano wówczas szeregi zbieżne i rozbieżne (znano nawet pewne kryteria zbieżności), to dominowało przekonanie, że podstawowe prawa algebry i analizy są jednakowe. Dla ówczesnych matematyków naturalne było, że na każdym szeregu można wykonywać dowolne przekształcenia i działania, podobnie jak na funkcjach wymiernych. Akceptowano nawet argumentację bardziej metafizyczną niż matematyczną. Na przykład Guido Grandi (1671–1742), profesor matematyki w Pizie, uważał (1703 r.), że wzory postaci

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = \\ &= 1 - 0 - 0 - \dots = 1, \\ 0 + 0 + 0 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pojawienie się „nowoczesnego człowieka” (*homo sapiens sapiens*) wydawało się wskazywać, że pochodzi on bezpośrednio od Neandertalczyka. Przełom przyniosły badania szczątków obu tych gatunków znalezionych w kilku jaskiniach izraelskich. Metoda termoluminescencyjna wykazała, że w jaskini Kebara Neandertalczyk przebywał mniej więcej od 62 do 48 tys. lat temu. W pobliskiej jaskini Qafzeh *homo sapiens sapiens* pojawił się już 90–100 tys. lat temu. Metodą rezonansu spinowego poprawiono ten wynik na  $120 \pm 8$  tys. lat i określono wiek czaszek *homo sapiens sapiens* z jaskini Skhul na  $110 \pm 10$  tys. lat. Te i inne nowe odkrycia sugerują, że *homo sapiens sapiens* i *homo neandertalis* to dwie różne gałęzie wywodzące się ze wspólnego pnia *archaic homo sapiens*. Neandertalczyk rozwinął się na Bliskim Wschodzie i w Europie, podczas gdy *homo sapiens sapiens* powstał w Afryce i stamtąd rozprzestrzenił się na wszystkie kontynenty. W Europie pojawił się około 35 tys. lat temu. Szybko wyparł Neandertalczyka i utworzył kulturę zwaną *Cro Magnon* znaną z pięknych malowideł jaskiniowych.

Niespodziewanie silnego poparcia tej hipotezie dostarczyła genetyka. W 1987 r. podjęto próbę wyznaczenia wieku i genotypu wspólnego przodka badanej grupy ludzi poprzez „odtworzenie w tył” mutacji koniecznych do wygenerowania obserwowanej różnorodności. Zrekonstruowane „drzewo genealogiczne” okazało się wyrastać z Afryki 140–290 tys. lat temu i wypuszczać odnogę na inne kontynenty 90–180 tys. lat temu. W następnych latach inne grupy opublikowały podobne rezultaty. Jednej z nich udało się odtworzyć sekwencję (397 par nukleotydów) DNA Neandertalczyka sprzed 40 tys. lat. Porównano ją z DNA 2051 ludzi i 59 szympanсів. Zmierzone średnie liczby różnic

człowiek	– człowiek	8,0
człowiek z Afryki	– Neandertalczyk	27,1
człowiek z Europy	– Neandertalczyk	28,2
człowiek	– szympanś	55,0

są mocnym potwierdzeniem hipotezy pochodzenia *homo sapiens sapiens* z Afryki. Gdyby pochodził on od Neandertalczyka, Europejczyk powinien być znacznie bliższy Neandertalczykowi niż Afrykańczyk. Jako najbardziej prawdopodobny rysuje się więc scenariusz

(daty w tys. lat temu):

- 2000 Wyodrębnienie się *homo erectus* w Afryce.
- 1600–800 *Homo erectus* przenosi się na inne kontynenty.
- 500–200 *Homo erectus* przekształca się stopniowo w archaicznego *homo sapiens*.
- 130–100 *Homo sapiens* w basenie Morza Śródziemnego daje początek Neandertalczykowi, który opanowuje Europę i Bliski Wschód.
- 150–120 *Homo sapiens* w Afryce daje początek *homo sapiens sapiens*.
- 110–90 *Homo sapiens sapiens* pojawia się na Bliskim Wschodzie.
- około 35 *Homo sapiens sapiens* gwałtownie opanowuje całą Europę, wypierając Neandertalczyka; eksplozja kulturalna *Cro Magnon*.

To, co stało się 30–40 tys. lat temu, bez cienia przesady można nazwać eksplozją kulturalną. Wprawdzie już na długo przedtem *homo sapiens sapiens* posługiwał się narzędziami, ale nigdy nie były one specjalnie zdobione. Natomiast począwszy od wieku około 35 tys. pojawia się mnóstwo bogato zdobionych narzędzi, rzeźb i malowideł na ścianach jaskiń (fotografia na okładce). W Europie odkryto już ponad 200 jaskiń z malowidłami. Co roku odkrywano nowe. Żadna z nich jednak nie przekracza magicznej granicy 35 000 lat. Dlaczego *homo sapiens sapiens*, genetycznie i anatomicznie niemal identyczny z nami, od 120 do 35 tys. lat temu nie rozwinął żadnej kultury? Co się wydarzyło 35 000 lat temu? Dlaczego *Cro Magnon* nagle tak bardzo się rozprzestrzenił i całkowicie wyparł Neandertalczyka? Dlaczego zaczął zdobić narzędzia, rzeźbić, malować na ścianach jaskiń? Wydaje się, że dlatego, iż rozwinął język, zaczął używać symboli, myśleć abstrakcyjnie. Ale dlaczego nastąpiło to tak nagle i dlaczego dopiero 35 000 lat temu, a nie np. 80 000 lat wcześniej?

A może istnieją dawniejsze malowidła i rzeźby, które czekają na odkrycie? Albo pomyliliśmy się w datowaniu pierwszych *homo sapiens sapiens* lub przegapiliśmy istotne różnice anatomiczne czy genetyczne? To wszystko mało prawdopodobne, ale nie wykluczone. Odpowiedź może przybliżyć jedynie cierpliwe poszukiwanie oraz dalsze doskonalenie metod fizycznych i genetycznych.

są symbolami „tworzenia czegoś z niczego” (wynik  $\frac{1}{2}$  uzyskał, przyjmując  $x = 1$  we wzorze

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

i nie zdając sobie sprawy, że ma on sens jedynie dla  $|x| < 1$ ).

Sytuacja ta trwała aż do pierwszej połowy XIX wieku, kiedy to m.in. B. Bolzano (1781–1848), A.L. Cauchy (1789–1857), N.H. Abel (1802–1829) zaczęli budować teorię zbieżności szeregów. Stworzone później teorie sumowania szeregów rozbieżnych pokazały, że pewne metody (idee) stosowane przez Eulera, Bernoullich nie są pozbawione podstaw.

Nie oznacza to jednak, że w XVIII wieku nie dostrzegano żadnych niebezpieczeństw związanych z działaniami nieskończonymi. G. Leibniz w liście z 10 stycznia 1714 r. do J. Bernoulliego (1667–1748) podaje kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych (wcześniej pisał o tym 26 czerwca 1705 r. do J. Hermanna (1678–1733)). Dla jednego z takich szeregów (dzisiaj nazywanego *anharmonicznym*) Ch. Goldbach (1690–1764) czyni niebanalne spostrzeżenie: wyrazy ciągu  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  można połączyć znakami  $+$  i  $-$  tak, by suma otrzymanego szeregu była równa dowolnej liczbie rzeczywistej. Komunikuje to Eulerowi (listem z 1 października 1742 r. i latem 1752 r.). Informacja ta przechodzi jednak bez echa. Dopiero w 1853 roku B. Riemann (1826–1866) wykazuje twierdzenie (opublikowane w 1867 r.): **mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry danej granicy.** W tej sytuacji *zbieżność szeregów, które nie są bezwzględnie zbieżne*, jest sprawą bardzo delikatną i wciąż aktualną (dla szeregów bezwzględnie zbieżnych wszystko jest jasne: **szereg bezwzględnie zbieżny nie zmienia swej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów**).

Szereg  $\sum x_n$  nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**, jeśli zbieżny jest szereg  $\sum |x_n|$ . Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywamy **warunkowo zbieżnym**.

Uzasadnienia obu wspomnianych tu twierdzeń nie są zbyt trudne i można je znaleźć np. w [2]. Przejrzenie książki [1] pozwala zorientować się, jak mocno i głęboko problematyka badania zbieżności szeregów „odpornych” na permutacje składników jest związana ze współczesnymi badaniami w zakresie analizy funkcjonalnej.

Podkreślić należy też, że w wielu fragmentach współczesnej matematyki działania nieskończone (np. szeregi) – już poprawnie zamocowane – odgrywają pierwszorzędną rolę i mają duże znaczenie praktyczne, by wspomnieć o szeregach Fouriera czy funkcjach analitycznych.

#### Literatura

- [1] V.M. Kadets, M.I. Kadets, *Rearrangement of series in Banach spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 1991.
- [2] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa, 1982.



#### Rozwiązanie zadania F 505.

Pod nieobecność siły ciężkości molekuly poruszałyby się chaotycznie i ich zderzenia z dnem i pokrywą naczynia równoważyłyby się. W polu siły ciężkości składowa pionowa prędkości molekul, poruszających się w dół, zwiększa się, a molekul poruszających się do góry – maleje. W rezultacie siła parcia na dno naczynia jest większa od siły parcia na pokrywę o tyle, ile wynosi ciężar gazu.