Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1999

Przypominamy treść zadań:

377. Rozważamy wielomian $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ zmiennej zespolonej z, o współczynnikach zespolonych. Dowieść, że jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)$ są liczbami zespolonymi o module 1, to również wszystkie pierwiastki wielomianu $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$ są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 369 (WT=1,99) i 370 (WT=3,17) z numeru 11/1998

Witold Bednarek	– Łódź	44,99
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	44,04
Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	38,82

Witamy nowych członków **Klubu 44 M**: pana Bednarka i pana Skalika.

377. Niech z_1, z_2, z_3 będą pierwiastkami wielomianu $P(z)$; $|z_j| = 1$, więc $1/z_j = \overline{z_j}$ dla $j = 1, 2, 3$. W myśl wzorów Viète'a: $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $c = -z_1 z_2 z_3$,

$$b = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -(c/z_1) - (c/z_2) - (c/z_3) = -c(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = \overline{a}c.$$

Zatem $|c| = 1$, $|b| = |a| \le 3$; wielomian $Q(z)$ ma postać $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1$; jednym z jego pierwiastków jest liczba -1.

Dzieląc $Q(z)$ przez dwumian $z + 1$, dostajemy trójmian kwadratowy $T(z) = z^2 + dz + 1$, gdzie $d = |a| - 1$. Skoro $|a| \le 3$, to $|d| \le 2$, więc wyróżnik trójmianu $T(z)$, równy $d^2 - 4$, nie jest dodatni. Wobec tego pierwiastki trójmianu $T(z)$ tworzą parę liczb zespolonych sprzężonych (w szczególnym przypadku może to być podwójny pierwiastek rzeczywisty). Moduły tych pierwiastków są równe, a ich iloczyn wynosi 1 (wzór Viète'a). Stąd wniosek, że oba te pierwiastki są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wybierzmy dowolnie $2k$ różnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_{2k}$. Liczby $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ oraz $n = p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_{2k}$ są względnie pierwsze, więc istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie $mx - ny = 1$. Skoro $m, n \ge 2$, liczby mx i ny są jednocześnie dodatnie lub ujemne. Tak więc $|mx|$ i $|ny|$ są dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi, a każda z nich ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Zadania

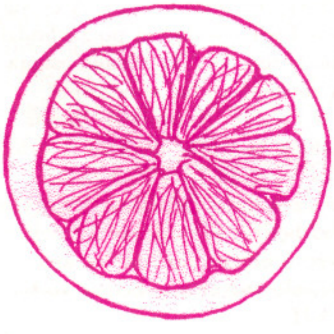
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 886. Niech a, b, x_0 będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że w ciągu (x_i), takim, że $x_n = ax_{n-1} + b$ $(n \ge 1)$, jest nieskończenie wiele liczb złożonych.
Rozwiązanie na str. 11

M 887. Wykazać, że jeśli żadna z liczb a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, $a + (n-1)d$ nie dzieli się przez n, to liczby d i n nie są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 3

M 888. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje liczba podzielna przez m, której zapis dziesiętny zawiera tylko zera i jedynki.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 503. Krótkowidz po zdjęciu okularów może czytać książkę, trzymając ją w odległości 16 cm od oczu. Jaka jest zdolność skupiająca okularów? Przyjąć, że normalna odległość dobrego widzenia wynosi 30 cm.
Rozwiązanie na str. 4

F 504. Na dnie akwarium, napełnionego wodą do wysokości 10 cm, umieszczono punktowe źródło światła. Na powierzchni wody unosi się okrągła nieprzezroczysta płytka tak, że jej środek znajduje się pionowo nad źródłem światła. Jaki jest najmniejszy promień płytki, przy którym ani jeden promień światła nie może wyjść przez powierzchnię wody? Współczynnik załamania woda-powietrze wynosi 1,33.
Rozwiązanie na str. 2