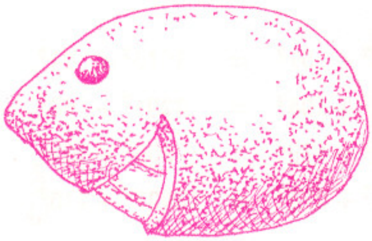
Wszędzie wypukła, jak sfera

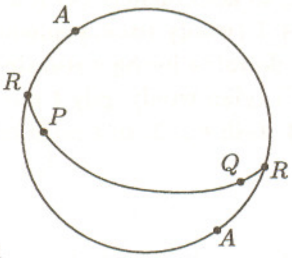
Marek KORDOS



Geometria jednorodna opisuje przestrzeń (wszystko jedno iluwymiarową – tu będzie stale najprostszy do obserwacji wymiar 2) w każdym miejscu taką samą. Oznacza to tyle, że jeśli wokół dwóch jej punktów weźmiemy malutkie kółeczka (ogólnie – kulki), to okażą się one nieodróżnialne. Gauss wprowadził ważne pojęcie rozróżniające te geometrie: krzywiznę (ale nie będziemy jej teraz definiować) – dla geometrii jednorodnej musi ona być stała. Gdy jest dodatnia, to kółeczka, o których była mowa, wyglądają jak narysowane na sferze (powierzchni kuli), gdy zerowa – jak na płaszczyźnie, gdy ujemna – jak na siodle. Widać więc, że dla dodatniej krzywizny przestrzeni jest mniej, a dla ujemnej – więcej niż na płaszczyźnie.

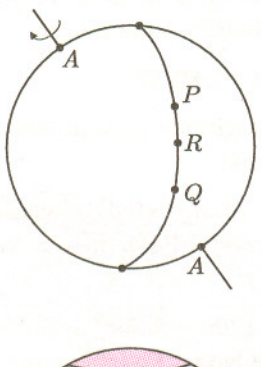
Jeżeli do jednorodności dorzucimy jeszcze warunek, aby przez dwa różne punkty przechodziła tylko jedna prosta (linia nieskracalna), to okaże się, że takich geometrii jest trzy. Najbardziej znana jest ta o krzywiźnie zerowej, naukowo zwana paraboliczną: jest to zwykła, szkolna geometria nosząca powszechniej znaną nazwę *euklidesowa*, od imienia matematyka, który ją w IV w.p.n.e. skodyfikował. Druga w kolejności pojawiła się na świecie geometria hiperboliczna, bardziej znana jako geometria *Bolyai–Łobaczewskiego*, od nazwisk matematyków, którzy około roku 1830 uparli się przy jej istnieniu. Trzecia wreszcie to geometria eliptyczna, czasami wiązana z nazwiskiem Riemanna, gdyż on stworzył całą mnogość różnych geometrii, wśród których i ona się znajdowała. Tutaj zajmiemy się nią właśnie, a raczej sposobami poglądowego zapoznania się z niektórymi jej twierdzeniami. Poglądowo, to znaczy przez oglądanie modelu, czyli struktury zachowującej się jak płaszczyzna eliptyczna, ale zbudowanej z dobrze nam znanej geometrii euklidesowej.

Skoro płaszczyzna eliptyczna jest lokalnie taka, jak sfera, to model zbudujemy ze sfery. Sama sfera nie jest modelem płaszczyzny eliptycznej. Łatwo się o tym przekonać, gdy zauważy się, że liniami nieskracalnymi na sferze są okręgi wielkie (czyli takie, których płaszczyzna przechodzi przez środek sfery), a przez punkty antypodyczne (czyli na końcu jednej średnicy) można przeprowadzić nie jeden, lecz dowolnie wiele takich okręgów (czyli prostych w geometrii sfery). Model płaszczyzny eliptycznej robi się ze sfery, właśnie sklejając końce każdej średnicy. Oczywiście, operacji takiej nie da się przeprowadzić fizycznie – mówi się wobec tego, że płaszczyzna eliptyczna nie jest zanurzalna w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jak jednak wobec tego obejrzeć coś, czego nie ma?



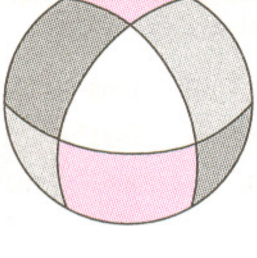
Rys. 1

Model, którym się posłużymy, będzie zbudowany ze sfery, której położenie i rozmiar tak będą dobrane do rozstawu naszych źrenic, że widzieć będziemy dokładnie jej połowę. Z każdej pary punktów antypodycznych będziemy widzieli dokładnie jeden (P i Q na rysunku 1), z wyjątkiem punktów widzianych na brzegu półsfery – te będziemy widzieli „w dwóch osobach” (na rysunku A i R). Oto natychmiastowe spostrzeżenia, czyli twierdzenia geometrii eliptycznej:
– prosta jest zbudowana tak jak okrąg (można po niej chodzić w kółko: gdy znajdziemy się – idąc w stronę od P do Q – w punkcie R z prawej strony, będziemy tym samym w punkcie R z lewej strony i idąc dalej znów dojdziemy do P);
– cała płaszczyzna eliptyczna leży po jednej stronie prostej, inaczej: prosta nie rozcina płaszczyzny (faktycznie, znajdując się nad prostą PQ możemy dojść do punktu A u góry, czyli na dole, i znaleźć się poniżej prostej PQ);
– dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny (bo na sferze dwa okręgi wielkie przecinają się w punktach antypodycznych).



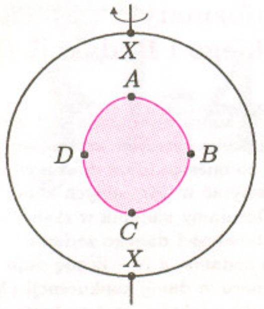
Rys. 2

Odległość w naszym modelu mierzy się tak jak na sferze, czyli nitką łączącą punkty z tej strony, z której jest bliżej (albo nie dalej). Tak więc odległość punktów P i Q z rysunku 1, to ten z łuków, który zawiera punkt R. Mamy zatem kolejne twierdzenie:
– proste na płaszczyźnie eliptycznej (mierzone w jednostkach równych promieniowi sfery) mają długość π.



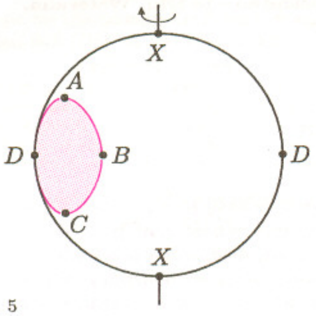
Rys. 3

Przy okazji można zobaczyć następną ciekawą własność naszego modelu – możemy go, mianowicie, obracać względem dowolnej osi przechodzącej przez środek sfery: gdy jedne punkty będą znikać z naszego pola widzenia, równocześnie pojawią się ich bracia bliźniacy, czyli antypody; w ten sposób stale będziemy widzieli całą płaszczyznę eliptyczną. Zastosowanie tego udogodnienia prezentuje rysunek 2, gdzie przez obrót tego, co widać na rysunku 1, przekonujemy się, że łuk prostej PQ, zawierający punkt R, jest tego samego rodzaju, co łuk go nie zawierający. Proponuję Czytelnikowi, aby zechciał przez odpowiednie obracanie konfiguracji z rysunku 3 przekonać się, że
– trzy proste nie przechodzące przez jeden punkt rozcinają płaszczyznę na cztery trójkąty.



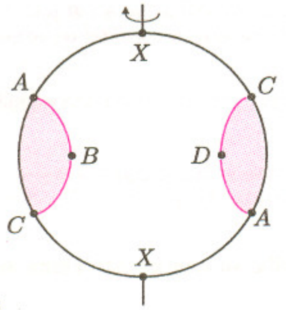
Rys. 4

Bardzo dziwną własność płaszczyzny eliptycznej prezentują rysunki 4–7. Oto fabuła. Wycięliśmy w płaszczyźnie eliptycznej okrągłą dziurę. Obracanie modelu przekonuje nas, że to, co zostało, to pasek sklejony w taki sposób, że jest wstęgą Möbiusa, a więc powierzchnią jednostronną. Czyli
– płaszczyzna eliptyczna jest sklejeniem koła i wstęgi Möbiusa, jest zatem powierzchnią jednostronną, a więc także nieorientowalną.



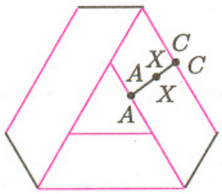
Rys. 5

Kolejne dwa rysunki pokazują, że
– na płaszczyźnie eliptycznej nie jest spełniona pierwsza cecha przystawania trójkątów.
Na rysunkach tych prostą podzielono na trzy równe części punktami A, B i C (każda z części ma więc długość $\frac{\pi}{3}$). Następnie z A i z B zatoczono okręgi promieniem $\frac{\pi}{3}$. Okręgi te przecinają się w trzech punktach: jednym jest C, a jeden z pozostałych oznaczmy D. Trójki ABC i ABD spełniają założenia pierwszej cechy przystawania trójkątów, a nie spełniają jej tezy (choćby dlatego, że punkty A, B i C leżą na jednej prostej, a punkt D na niej nie leży). Rozsuwając punkty A i B (rys. 9), otrzymujemy inny przykład: trójki ABD i ABP – tu o tym, że nie mogą być przystające, świadczy fakt, iż łamana ABD rozcina płaszczyznę eliptyczną, a łamana ABP nie.

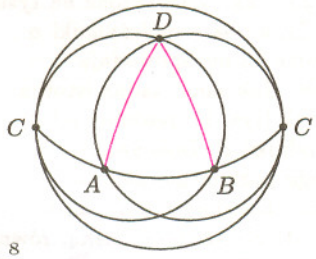


Rys. 6

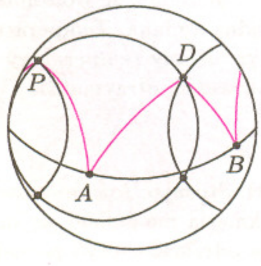
Ciekawych własności izometrii tej płaszczyzny (czyli przekształceń nie zmieniających odległości) jest więcej. Na przykład
– każde podobieństwo płaszczyzny eliptycznej jest izometrią (każde bowiem przekształca proste na proste, a te wszystkie mają tę samą długość; skala podobieństwa musi więc być równa 1).
Kolejną osobliwość daje spostrzeżenie, iż
– wszystkie prostopadłe do danej prostej przecinają się w jednym punkcie (rys. 10).
Bez większego trudu stwierdzamy wobec tego, że każda symetria osiowa jest symetrią środkową (rys. 11 i 12). Na koniec zadanie trudniejsze dla Czytelników zachęconych modelowym badaniem płaszczyzny eliptycznej:
– każda izometria płaszczyzny eliptycznej jest obrotem (z czego wynika w szczególności, że obracając model, dokonywaliśmy wszelkich możliwych izometrii).
Natychmiast uzyskuje się stąd morał, że
– każda izometria ma punkt stały i prostą stałą.
Oczywiście, takich spostrzeżeń można poczynić jeszcze bardzo, bardzo wiele.



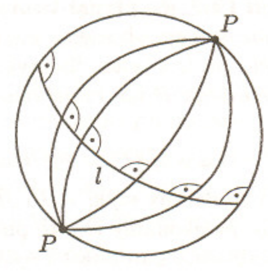
Rys. 7



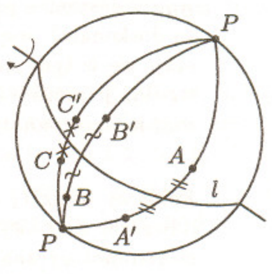
Rys. 8



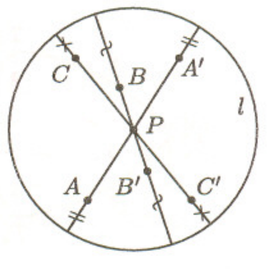
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12