Sumy dwóch kwadratów i kolejne liczby naturalne

Lew KURLANDCZYK i Andrzej NOWICKI

W artykule „Różne rozkłady na sumy kwadratów" (*Delta* 3/1998, str. 12–13) zajmowaliśmy się liczbami naturalnymi mającymi rozkłady na sumę dwóch kwadratów, w których występują kwadraty trzech kolejnych liczb naturalnych. Przykładem takiej liczby jest 1105. W rozkładach

$$1105 \;=\; 31^2+12^2 \;=\; 32^2+9^2 \;=\; 33^2+4^2$$

występują trzy kolejne liczby naturalne: 31, 32 i 33. Podobną własność mają, na przykład, liczby: 12025, 66625, 252601. Wykazaliśmy, że liczb tego typu jest nieskończenie wiele.

W tym artykule podamy pewien algorytm, za pomocą którego można znaleźć wszystkie takie liczby. Dokładniej, opiszemy wszystkie pary (M,n), w których $M,n>1$ są takimi liczbami naturalnymi, że

$$M \;=\; (n-1)^2+k_1^2 \;=\; n^2+k_2^2 \;=\; (n+1)^2+k_3^2, \tag{1}$$

dla pewnych liczb naturalnych k_1,k_2,k_3. We wspomnianym artykule udowodniliśmy, że liczba M spełnia (dla pewnego $n>1$) warunek (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby naturalne $b>a$, że a^2+b^2+1 jest liczbą kwadratową oraz $M=a^2b^2+a^2+b^2+1$. Nasze zadanie sprowadza się zatem do rozwiązania następującego problemu.

Problem. *Znaleźć wszystkie pary (a,b) takich liczb naturalnych, że $b>a$ i $1+a^2+b^2$ jest liczbą kwadratową.*

Jeśli para (a,b) jest taka, jak w tym problemie, to liczby

$$\begin{gathered} M=(a^2+1)(b^2+1), \qquad n=ab, \\ k_1=a+b, \qquad k_2=\sqrt{a^2+b^2+1}, \qquad k_3=b-a \end{gathered} \tag{2}$$

spełniają warunek (1).

Niech $c^2=a^2+b^2+1$ i niech $t=c-b$. Wówczas z równości $(b+t)^2=a^2+b^2+1$ otrzymujemy równość

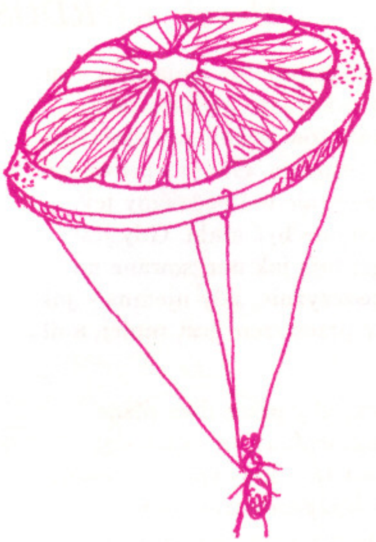
$$a^2=2bt+t^2-1. \tag{3}$$

Załóżmy najpierw, że $t=1$. Wówczas $a^2=2b$ i stąd $(a,b)=(2r,2r^2)$, gdzie r jest liczbą naturalną. Dla każdego $r>1$ mamy parę $(a,b)=(2r,2r^2)$, spełniającą warunki podane w problemie. Podstawiając to do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $r=2,3,4,5$) następujące rozkłady:

$$\begin{aligned} 1105 &= 31^2+12^2 &&= 32^2+\;\,9^2 &&= 33^2+\;\,4^2, \\ 12025 &= 107^2+24^2 &&= 108^2+19^2 &&= 109^2+12^2, \\ 66625 &= 255^2+40^2 &&= 256^2+33^2 &&= 257^2+24^2, \\ 252601 &= 499^2+60^2 &&= 500^2+51^2 &&= 501^2+40^2. \end{aligned}$$

Powróćmy do równości (3) i załóżmy, że $t>1$. Ponieważ reszta z dzielenia przez 4 liczby kwadratowej a^2 nie może być równa 3, więc t nie może być liczbą parzystą. Zatem t jest liczbą nieparzystą. Zauważmy ponadto, że t nie może być podzielne przez 3. Gdyby tak było, wówczas resztą z dzielenia liczby kwadratowej a^2 przez 3 byłaby liczba 2, a to jest niemożliwe. Wykazaliśmy więc, że $t\neq 2,3,4$.

Niech $t=5$. Wtedy $a^2=10b+24$, skąd łatwo wynika, że liczby a i b są parzyste. Połóżmy $a=2v$, $b=2u$, gdzie v, u są liczbami naturalnymi. Wtedy $v^2=5u+6$, a zatem $v=5s\pm 1$ dla pewnego naturalnego s.

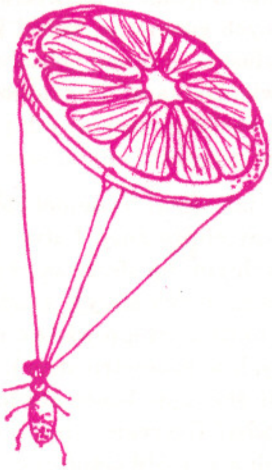


Jeśli $v = 5s + 1$, to $u = 5s^2 + 2s - 1$ i stąd $(a, b) = (10s + 2, 10s^2 + 4s - 2)$. Każda para (a, b) takiej postaci, dla $s > 1$ (jeśli $s = 1$, to $a = b$), spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 2, 3, 4, 5$) następujące rozkłady:

$$\begin{aligned}
1026745 &= 1011^2 + 68^2 = 1012^2 + 51^2 = 1013^2 + 24^2,\\
10251025 &= 3199^2 + 132^2 = 3200^2 + 105^2 = 3201^2 + 68^2,\\
53438905 &= 7307^2 + 216^2 = 7308^2 + 179^2 = 7309^2 + 132^2,\\
194286625 &= 13935^2 + 320^2 = 13936^2 + 273^2 = 13937^2 + 216^2.
\end{aligned}$$

Jeśli $v = 5s - 1$, to $u = 5s^2 - 2s - 1$ i stąd $(a, b) = (10s - 2, 10s^2 - 4s - 2)$. Każda para (a, b) takiej postaci, dla $s > 1$ (jeśli $s = 1$, to $a > b$), spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 2, 3, 4, 5$):

$$\begin{aligned}
292825 &= 539^2 + 48^2 = 540^2 + 35^2 = 541^2 + 12^2,\\
4534945 &= 2127^2 + 104^2 = 2128^2 + 81^2 = 2129^2 + 48^2,\\
29138425 &= 5395^2 + 180^2 = 5396^2 + 147^2 = 5397^2 + 104^2,\\
119825425 &= 10943^2 + 276^2 = 10944^2 + 233^2 = 10945^2 + 180^2.
\end{aligned}$$



Z równości (3) wynika, że liczba a jest rozwiązaniem kongruencji:

$$x^2 \equiv -1 \pmod{t}. \tag{4}$$

Do dalszych rozważań potrzebne nam będą pewne dobrze znane fakty dotyczące rozwiązań tej kongruencji. Fakty te znajdziemy, na przykład, w książce Wacława Sierpińskiego *Teoria liczb* (Warszawa–Wrocław 1950) lub w książce Iwana Winogradowa *Elementy teorii liczb* (PWN, Warszawa 1954).

Wiadomo, że jeśli t jest nieparzystą liczbą pierwszą, to kongruencja (4) ma rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy t jest postaci $4k + 1$ (wtedy rozwiązaniem jest $x = \pm(2k)!$). W ogólnym przypadku, gdy t jest dowolną liczbą naturalną nieparzystą, kongruencja (4) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy t nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą postaci $4k + 3$. Jeśli $t > 1$, to t musi mieć zatem postać

$$t = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

gdzie $n_1 > 0, \ldots, n_s > 0$ oraz $p_1, \ldots, p_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi postaci $4k + 1$. W takim przypadku kongruencja (4) ma dokładnie 2^s rozwiązań modulo t. W przedziale $[1, 100]$ taką liczbą t jest dokładnie jedna z liczb:

$$1, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97.$$

Rozpatrzyliśmy już dwa przypadki $t = 1$ i $t = 5$. Analogicznie postępujemy dla każdego (nieparzystego) t spełniającego opisane warunki.

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze przypadek $t = 13$. Mamy wtedy równość $a^2 = 26b + 168$, z której wynika, że liczby a i b są parzyste. Połóżmy $a = 2v$, $b = 2u$. Wtedy $v^2 = 13u + 42$, więc $v = 13r \pm 4$.

Jeśli $v = 13r + 4$, to $u = 13r^2 + 8r - 2$ i stąd $(a, b) = (26r + 8, 26r^2 + 16r - 4)$. Każda taka para (a, b) spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 1, 2, 3$) rozkłady:

$$\begin{aligned}
1671865 &= 1291^2 + 72^2 = 1292^2 + 51^2 = 1293^2 + 4^2,\\
62747425 &= 7919^2 + 192^2 = 7920^2 + 145^2 = 7921^2 + 72^2,\\
571677145 &= 23907^2 + 364^2 = 23908^2 + 291^2 = 23909^2 + 192^2.
\end{aligned}$$

Podobnie postępujemy, gdy $v = 13r - 4$.

Rozwiązanie zadania M 886.
Nasz ciąg jest ciągiem rosnącym. Możemy założyć, że liczby a i b są względnie pierwsze (w przeciwnym przypadku x_i dla $i \geq 1$ będą podzielne przez $NWD(a, b)$). Wtedy a i x_k ($k \geq 1$) będą również względnie pierwsze. Ustalmy k i rozważmy liczby $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+x_k}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją wśród nich takie dwie liczby, np. x_p i x_q ($p > q$), że $x_k | (x_p - x_q)$. Mamy $x_p - x_q = a(x_{p-1} - x_{q-1})$, skąd wynika, że również $x_k | (x_{p-1} - x_{q-1})$ (bo $NWD(a, x_k) = 1$). Zmniejszając dalej wskaźniki w podobny sposób, przekonamy się w końcu, że $x_k | (x_{k+p-q} - x_k)$, skąd wynika, iż $x_k | x_{k+p-q}$, czyli że x_{k+p-q} jest liczbą złożoną. Ponieważ w naszym rozumowaniu k było dowolne, więc teza jest udowodniona.